Matemáticas 1

Aritmetica y Álgebra para Bachillerato

Por competencias

Autores:
Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Armando Flórez Arco



Plan 2015



DIRECTORIO

Dr. Juan Eulogio Guerra Liera
Rector

MC. Jesús Madueña Molina
Secretario General

MC. Manuel de Jesús Lara Salazar
Secretario de Administración y Finanzas

Dr. Armando Flórez Arco
Director de DGEP

Dr. Armando Bueno Blanco
Subdirector Académico de DGEP

Mtro. Simón Martín Díaz Quiñónez
Subdirector Administrativo de DGEP

Matemáticas 1

Aritmetica y Álgebra para Bachillerato

Por competencias

Autores:
Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Armando Flórez Arco



Plan 2015

Matemáticas I

Aritmética y Álgebra para bachillerato

POR COMPETENCIAS

Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Armando Flórez de Arco

UAS/DGEP

Matemáticas I
Aritmética y Álgebra para bachillerato
por competencias

Arturo Ylé Martínez
José Alfredo Juárez Duarte
Armando Flórez de Arco

Primera edición, agosto de 2016
Primera reimpresión, agosto de 2017
Segunda reimpresión, agosto de 2018
Tercera reimpresión, agosto de 2019

Diseño interior:
Leticia Sánchez Lara
Carol Judith Zazueta Rivera

Diseño de portada:
Edgar López Romero

Editorial: Servicios Once Ríos Editores
Río Usumacinta 821 Colonia Industrial Bravo
Culiacán, Sin. Tel-fax: 667 712-2950

Edición con fines académicos, no lucrativa.

Impreso en México
Printed in Mexico

Dedicamos este libro a todos los estudiantes
y maestros que hacen, y han hecho,
el esfuerzo cotidiano por mejorar la calidad
del aprendizaje y la enseñanza de las
matemáticas en las aulas del bachillerato
de la Universidad Autónoma de Sinaloa.
Por supuesto, también lo dedicamos a nuestras
familias y amigos. Gracias a todos por
su confianza y apoyo.

LOS AUTORES

Contenido

Presentación

Esta segunda edición del texto está destinada a los estudiantes que cursan el primer grado de las preparatorias, con Plan de Estudios 2015, del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Los contenidos del mismo cubren el primer semestre del ciclo escolar, en correspondencia con las exigencias del Programa de Matemáticas I (Aritmética y Álgebra).

El propósito general de la asignatura de Matemáticas I es que al finalizar el curso el alumno conozca y comprenda el lenguaje algebraico y los procedimientos y operaciones aritméticas y algebraicas básicas, y los aplique en la modelación, formulación y resolución de problemas de su vida cotidiana, y de algunas áreas de las ingenierías y las ciencias.

Para lograr tal propósito las competencias genéricas y disciplinares básicas de matemáticas a desarrollar durante el curso son las siguientes:

Competencias genéricas	Atributos
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	4.1 Expresa ideas y conceptos mediante diversos sistemas de representación simbólica.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva en la búsqueda y adquisición de nuevos conocimientos. 5.7 Propone soluciones a problemas del orden cotidiano, científico, tecnológico y filosófico.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética. 6.5 Emite juicios críticos y creativos, basándose en razones argumentadas y válidas.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	7.3 Articula los saberes de diversos campos del conocimiento y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	8.1 Plantea problemas y ofrece alternativas de solución al desarrollar proyectos en equipos de trabajo, y define un curso de acción con pasos específicos. 8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.

Competencias disciplinares básicas del área de matemáticas	Criterios de aprendizaje
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	Construye e interpreta modelos matemáticos pertinentes para la representación, comprensión y análisis de situaciones o problemas reales, hipotéticos o formales, mediante la modelación y aplicación de conceptos, procedimientos y símbolos de la aritmética y el álgebra.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	Formula y resuelve problemas matemáticos reales, hipotéticos o formales, mediante la aplicación de conceptos y procedimientos de la aritmética y el álgebra.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Explica e interpreta los resultados obtenidos en los cálculos, ejercicios y problemas resueltos sobre la aritmética y el álgebra, y los contrasta con axiomas, procedimientos y modelos establecidos y con las condiciones dadas o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	Argumenta la validez de la solución de los ejercicios y problemas resueltos sobre aritmética y álgebra, usando métodos numéricos, gráficos o analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	Interpreta tablas, gráficas, diagramas y textos con símbolos, conceptos y operaciones de la aritmética y el álgebra, mostrando comprensión en la lectura de textos de Matemáticas y emitiendo juicios correctos y bien fundados sobre las diversas representaciones de los objetos matemáticos.

El contenido tratado en este texto es de nivel básico elemental, ya qué el bachillerato universitario tiene carácter propedéutico, así los conocimientos teóricos que aparecen en cada capítulo constituyen los mínimos que se requieren para la comprensión del contenido y el desarrollo de las competencias matemáticas fundamentales. Mientras que, didácticamente, se desarrollan de manera intuitiva e informal, hasta donde sea matemáticamente posible, por lo cual se enfatiza en la visualización geométrica de los conceptos y operaciones, y en aplicaciones sencillas.

El texto de Matemáticas I se encuentra diseñado para ser trabajado por procesos, desde el enfoque en competencias, siguiendo una metodología activa de enseñanza/aprendizaje que deberá estar centrada en: investigaciones autónomas del alumno, exposiciones de clase, talleres de resolución individual y/o grupal de ejercicios y problemas escolares formales o contex-

tualizados, argumentaciones y demostraciones matemáticas, evaluación y comunicación de procedimientos y resultados, análisis y corrección de errores.

Estas orientaciones didácticas generales deberán desarrollarse en un ambiente, o microcosmos cultural de practicantes o aprendices, similar al de la comunidad científica. Y se recomienda que el docente lo implemente a través de los siguientes momentos y **funciones didácticas (FD):** ***motivación, orientación hacia el objetivo, aseguramiento del nivel de partida, elaboración o desarrollo del nuevo contenido de aprendizaje, consolidación y fijación del aprendizaje, control y evaluación del aprendizaje.***

Los contenidos disciplinares tratados abordan ampliamente la terminología y simbología algebraica y el trabajo procedimental o algorítmico. La ejercitación que se propone en todos los temas es amplia y variada y resulta suficiente para el nivel de profundidad y complejidad con que se deben cumplir los objetivos del programa. Los ejercicios están dirigidos en lo fundamental al desarrollo de habilidades básicas y a través de ellos se propicia la integración del contenido. Sin embargo, recomendamos al estudiante el uso de un software, por ejemplo el Geogebra, para efecto de comprobar los resultados de algunos ejercicios.

En cada uno de los apartados, en que se dividen los capítulos, se presentan ejemplos completamente desarrollados de los problemas y ejercicios típicos correspondientes a los conocimientos teóricos tratados, con el propósito de contribuir al desarrollo de habilidades en los procedimientos y estrategias de trabajo y para fijar los conocimientos. Para cada uno de los temas tratados hay una gran variedad de actividades de aprendizaje dedicadas a la resolución de problemas, lo que requiere habilidad para traducir del lenguaje común al matemático y viceversa, o sea, para la elaboración de modelos matemáticos.

El contenido del libro se ha estructurado y organizado en tres capítulos, en función de lograr una mejor sistematización e integración de los conocimientos. En el **primer capítulo,** se estudian los elementos de los ***conjuntos y los números reales en el contexto de la aritmética***. Esto en razón de que el Álgebra elemental resulta de una generalización de la aritmética, y por ende es natural y conveniente que el alumno reactive sus conocimientos de aritmética, en el contexto de los diferentes sistemas numéricos, para que se posibilite un mejor aprendizaje de esta rama de las matemáticas. Así pues, esta unidad ofrece magníficas oportunidades para reactivar los conocimientos y las habilidades aritméticas sobre operaciones combinadas con números reales, expresados de diferentes formas.

En el **segundo capítulo** se inicia sobre la base de la Aritmética el estudio formal del Álgebra Elemental. La unidad principia con el estudio del **lenguaje algebraico,** y se hace teniendo siempre presente que el desarrollo y comprensión del lenguaje matemático constituye una premisa esencial y básica para lograr el nivel de abstracción, generalidad y aplicación que la matemática ha alcanzado. Ya que el uso formal y correcto de la simbología y reglas de operación, así como el logro funcional o útil del conocimiento algebraico, solamente es posible si se comprende el significado del trabajo con la simbología y las operaciones con las variables (por ejemplo la traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa), en consecuencia, en la unidad se enfatiza en los **aspectos sintáctico y semántico del lenguaje algebraico.**

Después de estudiarse los fundamentos del lenguaje algebraico, en esta misma unidad, se abordan los conceptos, definiciones y operaciones relativos a las expresiones algebraicas más sencillas como son **los polinomios.** Así por cuestiones didácticas los cálculos algebraicos se limitan de inicio a los polinomios de una, dos o tres variables. Posteriormente, en el tercer capítulo de este texto, y en el curso de Matemáticas II, los cálculos algebraicos se extienden a expresiones algebraicas más complicadas.

Por último, en el **tercer capítulo,** se estudia la **factorización** de polinomios y los conceptos y operaciones fundamentales de las **fracciones algebraicas.** En aras de lograr la funcionalidad del conocimiento algebraico y el desarrollo de habilidades en el estudiante, una vez estudiada la factorización de polinomios inmediatamente se pasa a sus aplicaciones en la simplificación de fracciones algebraicas y a la resolución de ecuaciones. En este mismo sentido, se estudian los conceptos y operaciones algebraicas básicas de las fracciones algebraicas, tratando de que el estudiante adquiera particularmente habilidades en la simplificación de sus resultados, y en la aplicación de sus conocimientos.

Antes de cerrar esta presentación queremos sugerir y advertir a los profesores y estudiantes de matemáticas del bachillerato, que usen este material como lo que es: **un material de apoyo didáctico.** Ningún texto, por sí solo, resuelve todos los problemas que conlleva el proceso de enseñanza/aprendizaje de la Matemática. Por lo cual, el maestro deberá aplicar toda su experiencia y competencias docentes para el uso planificado, crítico y selectivo del texto, mientras que el estudiante deberá desarrollar, con disciplina y con la guía del profesor, su mayor esfuerzo para su comprensión.

Estimables lectores, aunque este texto ha sido revisado con mucho cuidado en su escritura y edición, desgraciadamente siempre se presentan errores involuntarios, por lo cual les agradecemos de antemano que nos hagan llegar sus comentarios, críticas y propuestas de cambio a la Academia de Matemáticas de la DGEP-UAS (o a la dirección electrónica arturoyle@hotmail.com), para así poder mejorarlo, conjuntamente con ustedes, en futuras ediciones.

Esta edición del libro se ha realizado en los talleres gráficos de Servicios Editoriales Once Ríos, los lectores podrán apreciar la calidad del trabajo que evidencia su profesionalismo, lo que nos produce gran satisfacción, por tal razón queremos expresarles nuestro reconocimiento y felicitación.

Agradecemos las facilidades que para esta publicación brindaron los directivos de la Dirección General de Escuelas Preparatorias de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Finalmente les deseamos respectivamente a los alumnos y profesores muchos éxitos en el aprendizaje y enseñanza del Álgebra y esperamos que este libro les ayude en este desempeño.

Muchas gracias: LOS AUTORES

ATENTAMENTE

Culiacán Rosales, Sinaloa, julio de 2016

1 Números reales y aritmética

Propósito de unidad

Comprende y realiza las operaciones fundamentales de los conjuntos y de la aritmética, considerando las propiedades, representaciones y subconjuntos numéricos de los números reales, y las aplica en los cálculos y en la modelación, formulación y resolución de problemas en diversos contextos.

Contenido

- **Elementos de Conjuntos:** Concepto y notación de conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos. Conjunto vació. Conjunto universal. Subconjuntos. Operaciones elementales entre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento. Diagramas de Venn. Aplicaciones de los conjuntos.

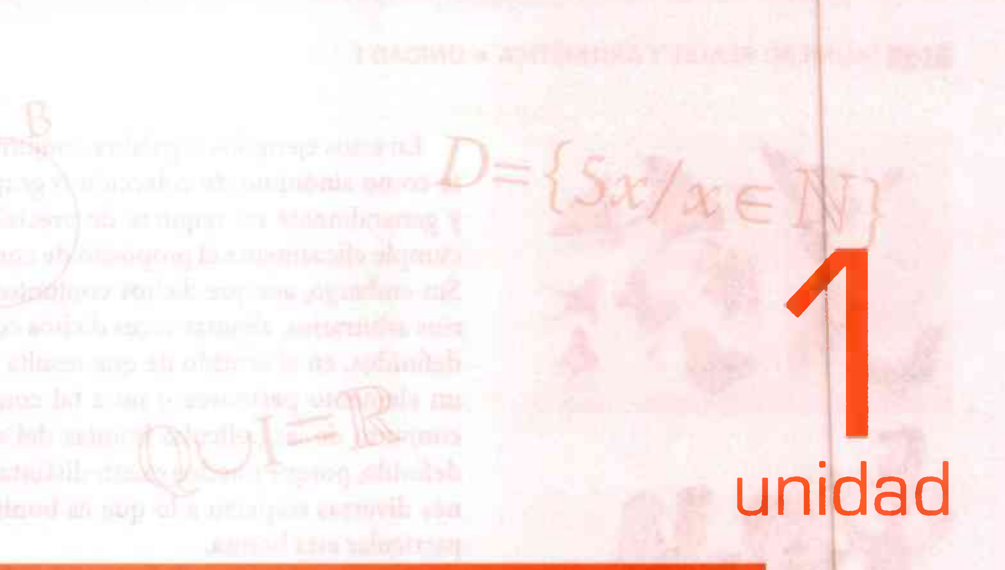
- **Sistemas Numéricos y Aritmética:** Concepto de número. *Números naturales:* definición, operaciones, potencias con exponentes naturales y sus leyes de exponentes, factorización, números primos y compuestos, máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm). *Números enteros:* definición, operaciones y regla de los signos, propiedades, potencias con exponentes enteros y sus leyes de los exponentes. *Números racionales:* definición, representaciones, operaciones y propiedades, potencias de racionales y sus leyes de exponentes, razones, porcentajes y proporciones, variación directamente e inversamente proporcional. *Números irracionales:* definición, representaciones y operaciones, radicales (con radicandos números racionales) y raíces. *Números reales:* definición y representación geométrica, operaciones y propiedades de campo de los números reales, distancia y valor absoluto, propiedades de orden en los números reales, desigualdades e intervalos, operaciones y leyes de exponentes para potencias y radicales.

Indicadores de desempeño

En esta unidad debe lograrse que los alumnos sean capaces de:

1) Conocer y aplicar el concepto, la simbología y las operaciones de los conjuntos en el estudio de los números reales, y de la aritmética y el álgebra en general.
2) Conocer, identificar y aplicar los diversos sistemas numéricos que componen los números reales, así como sus operaciones y propiedades y diversas representaciones, en los cálculos y en la formulación y resolución de problemas aritméticos y algebraicos.
3) Reactivar la aritmética a través de la realización de cálculos aritméticos y algebraicos en los diversos sistemas numéricos que componen los números reales, y de su aplicación en contextos problemáticos donde aparecen factores y divisores, razones, proporciones y porcentajes.





Actividad preliminar: ¿Qué es un conjunto?

Ver los siguientes videos:
http://www.youtube.com/watch?v=SYNCycRsLPg
http://www.youtube.com/watch?v=6vs73U9TgX4



1.1 Elementos básicos de conjuntos

El concepto de conjunto es básico en la ciencia matemática, y se aplicara con mucha frecuencia en todas las asignaturas de matemáticas. En particular, el estudio y comprensión del álgebra se facilita mediante el uso del lenguaje de conjuntos. En este apartado se estudian y formalizan, a nivel elemental, los conceptos y operaciones básicas de los conjuntos, en la idea de aplicarlas inmediatamente en el estudio de los números reales y en la resolución de problemas como el siguiente:

En una entrevista efectuada por teléfono a 140 personas se encontró que en los domingos: 90 personas van al cine, 70 ven televisión en casa, 40 hacen las dos cosas, mientras que el resto ni van al cine ni ven televisión. Determina cuántas personas de las entrevistadas: (a) van únicamente al cine sin ver televisión?, (b) ven únicamente televisión sin ir al cine? y (c) no hacen ninguna de las dos cosas?

Noción y concepto de conjunto

Mí noción de conjunto es:____.

En la vida cotidiana el concepto "conjunto" es muy familiar y de mucha aplicación. Así frecuentemente escuchamos, o decimos, que:

- En la feria pasada fui a ver el conjunto musical los Tigres del Norte.
- Ya tengo el conjunto o la colección de libros de todas las asignaturas del primer semestre.
- El conjunto de los números naturales son:____________________________________.
- El conjunto de estudiantes de primer año del bachillerato de la uas durante el ciclo escolar 2016-2017.





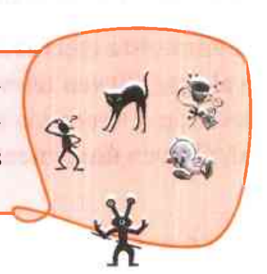
En estos ejemplos la palabra conjunto se usa intuitivamente como sinónimo de colección o grupo de cosas u objetos, y generalmente no requiere de precisión conceptual ya que cumple eficazmente el propósito de comunicar algo a alguien. Sin embargo, aunque dichos conjuntos se definen con criterios arbitrarios, algunas veces dichos conjuntos no están bien definidos, en el sentido de que resulta confuso determinar si un elemento pertenece o no a tal conjunto. Por ejemplo, el conjunto de las películas bonitas del año 2015 no está bien definido, porque pueden existir distintas personas con opiniones diversas respecto a lo que es bonito y si una película en particular está bonita.

En matemáticas también se utiliza la palabra conjunto, sin embargo, aquí se usa con significados más técnicos y precisos que en la vida cotidiana. Así decimos que:

- ✓ El 5.87 no pertenece al conjunto de los números enteros, pero sí pertenece al conjunto de los números racionales.
- ✓ El conjunto de los números naturales pares tiene igual números de elementos que el conjunto de los números naturales impares (Verifícalo).
- ✓ Los números reales −3 y 2 son elementos del conjunto solución de la ecuación cuadrática $x^2 + x - 6 = 0$ (Verifícalo).
- ✓ Una recta esta compuesta por un conjunto infinito de puntos.

Un conjunto, aunque se considera un término primario (que no se define), siempre es necesario explicitar y precisar algún criterio de definición. De lo anterior, y tomando como referencia los objetivos y necesidades de este curso, para lo que sigue será suficiente la siguiente noción de conjunto:

> Un conjunto es una colección de objetos cualesquiera, los cuales se llaman elementos del conjunto, con un criterio bien definido que sirve para determinar si un elemento cualquiera es miembro o pertenece a dicho conjunto.



Notación e igualdad de conjuntos

Los elementos de un conjunto, que pueden ser a su vez otros conjuntos, se escriben entre llaves { } y se separan por comas. Así $\{a, e, i, o, u\}$ denota al conjunto de las vocales del español. En algunas ocasiones cuando la lista es muy larga es posible utilizar puntos suspensivos, como en $\{a, b, c,..., x, y, z\}$, o cuando es imposible enlistarlos todos, como en los números naturales $\{1, 2, 3, 4,...\}$. Los puntos suspensivos se usarán siempre y cuando se conozca el elemento que sigue en cada caso; es decir, al dar un elemento cualquiera del conjunto, sabemos cuál está después de él.

Es usual denotar los conjuntos con letras mayúsculas del alfabeto, mientras que sus elementos se denotan con letras minúsculas. Por ejemplo, el conjunto de las letras vocales puede escribirse como $V=\{a, e, i, o, u\}$. De igual manera, podemos llamar G al conjunto de las letras del alfabeto griego y escri-

bir: $G=\{\propto, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ..., \psi, \omega\}$. O también, podemos representar al conjunto de los números naturales pares con P, y escribir: $P=\{2, 4, 6, 8, 10,...\}$. Cuando un elemento "x" pertenece a un conjunto A se dice que ***"x*, es elemento de *A"***, o bien que ***"x* está en *A"***. Y se simboliza como: $x \in A$. En caso contrario, cuando un elemento "x" no pertenece al conjunto "A", se simboliza así: $x \notin A$.

$x \in A$, se lee "x es elemento de A" o "x está en A" o "x pertenece a A".

$x \notin A$, se lee "x no es elemento de A" o "x no está en A" o "x no pertenece a A".

Si tenemos el conjunto M de los números naturales múltiplos de cinco, comprendidos entre 10 y 295, o sea $M= \{15, 20, 25, ..., 285, 290\}$

Ejemplo | $25 \in M, 30 \in M, 100 \in M, 290 \in M$, pero, $7 \notin M, 12 \notin M, 26 \notin M, 113 \notin M, 295 \notin M$.

Si tenemos los conjuntos $A=\{1, 2, 3\}$ y $B=\{2, 3, 1\}$ se observa que ambos tienen los mismos elementos aunque en diferente orden. En casos como este se dice que ambos conjuntos son iguales, y se escribe: $A=B$. De donde, dos o más conjuntos son iguales, si todos y cada uno de los elementos de cada conjunto son también un elemento de los demás conjuntos. En conclusión la igualdad de dos o más conjuntos no requiere que los elementos se dispongan en el mismo orden. Así, los siguientes conjuntos son iguales:

$$\{a, b\}=\{b, a\} \text{ y } \{16, 12, 8, 4\}= \{12, 4, 16, 8\}$$

Además de expresar un conjunto haciendo una lista de sus elementos, existe otra forma que consiste en representarlos por una letra seguida de una proposición que enuncia la propiedad que define al conjunto. Ejemplo: en $V=\{a, e, i, o, u\}$, la propiedad de sus elementos es la de ser una vocal, de donde, los elementos se pueden representar por la letra x, y entonces el conjunto V se expresa así:

$$V=\{x, \text{ tal que } x \text{ es una vocal}\}$$

La expresión "tal que" se acostumbra simbolizar como /; quedando el conjunto V de la siguiente manera: $V=\{x / x \text{ es una vocal}\}$.

Para algunos conjuntos es costumbre utilizar símbolos especiales, como en el caso de los conjuntos numéricos. Así tenemos qué:

El método de listar todos los elementos de un conjunto, se llama de ***extensión o enumeración*** y el de utilizar una propiedad se llama método de ***comprensión***.

$\mathbb{N}$= Conjunto de los números naturales= $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$
$\mathbb{N}= \{x/x \text{ es un número natural}\}$
$\mathbb{Z}$= Conjunto de los números enteros= $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$
$\mathbb{Z}= \{x/x \text{ es un número entero}\}$

Ejemplo

a) $B= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por comprensión expresa:
$B= \{x/x \text{ es un número natural menor que } 7\}$, se lee: "B es el conjunto de todas las x, tales que x es un número natural menor que 7".

b) Sea: $C=\{2, 4, 6, 8, ...\}$, el conjunto de los números naturales pares, por comprensión se expresa: $C=\{x/x \text{ es un número natural par}\}=\{2x/x \in \mathbb{N}\}$.

c) Sea: $D= \{5, 10, 15, 20,...\}$, el conjunto de los números naturales múltiplos de 5, o divisibles entre 5, entonces $D= \{5x/x \in \mathbb{N}\}$.

d) Sea: $E=\{5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, el conjunto de los números naturales impares mayores que 4 y menores que 16, entonces: $E=\{x/\ x \in \mathbb{N}$ y $4<x<16\}$.

Conjuntos finitos e infinitos. Conjunto vacío

De los ejemplos anteriores, puedes observar que al momento de listar, o describir, todos los elementos de un conjunto pueden presentarse tres situaciones: que el número de elementos sea finito, infinito o que no exista elemento alguno. En el primer caso se trata de un conjunto finito, en el segundo de un conjunto infinito y en el tercero tenemos un ("exótico") conjunto vacío. El número de elementos de un conjunto A se denota por $n(\mathrm{A})$. Así tenemos que:

$G=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, es un conjunto finito, con $n(\mathrm{G})=6$

$\tilde{N}=\{4, 8, 12, 16,...\}$, es un conjunto infinito, con $n(\tilde{N})=\infty$

$V=\{x\ /\ x\in\mathbb{N}$ y $x<0\}=\{\ \ \}$, es un conjunto vacío, con $n(V)=0$.

Posiblemente te resulte extraño que se hable de conjuntos vacíos, sin embargo, este tipo de conjuntos sin elementos es frecuente en matemáticas. Veamos un par de ejemplos: Sea, $P=\{\ y\ /\ y\in\Re, y^2=-9\}$. Si buscamos los valores reales de y tales que $y^2=-9$, es decir buscamos un número que elevado al cuadrado de -9, resulta claro que no existe ningún número que cumpla esta condición, pues ya sabemos que todo número positivo o negativo elevado al cuadrado es otro número positivo. Por lo tanto: $P=\{\ \ \}$ es un conjunto vacío. El conjunto vacío también se denota con el símbolo ϕ, de donde, $P=\{y\ /\ y\in\Re, y^2=-9\}$ $=\{\ \ \}=\phi$. Otro ejemplo: sea $D=\{x/x\in\mathbb{N}, 2<x<4, x\neq3\}$, resulta evidente que: $D=\{\ \ \}=\phi$.

En la vida cotidiana los conjuntos vacíos casi no se usan, lo cual no implica que no existan. Para que te convenzas enumera los elementos del siguiente conjunto: $P=\{x/x$ es una mujer que haya sido presidente de México hasta antes del año 2016$\}$.

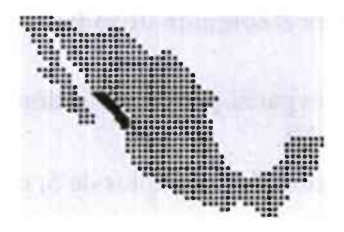
Si revisas la historia política del país concluirás que no existe persona que tenga esta propiedad. Por lo tanto, el conjunto $P=\{\ \ \}=\phi$.

> Un conjunto vacío es aquel que no tiene elementos.
> Los símbolos que lo representa son $\{\ \ \}$ y ϕ. O sea: $\{\ \ \}=\phi$.

Subconjuntos

Considérese los conjuntos A=$\{x/x$ es habitante de Sinaloa$\}$ y B=$\{y/y$ es habitante de México$\}$. ¿Qué puede afirmarse de los elementos del conjunto A con respecto a los elementos de B?

Respuesta: ____.



Esta relación entre A y B se simboliza así: **A⊂ B**, el cual se lee: **"A está contenido en B"** o **"A es subconjunto de B"**. Así pues, dados dos conjuntos A y B se dice que A es subconjunto de B, si y sólo si todos los elementos de A son elementos de B.

En consecuencia, un conjunto A no es subconjunto de B si existe al menos un elemento en A que no pertenece a B. Ejemplo, sí A={1, 2, 3, 4, 5} y B={1, 2, 3, 4, 6, 7}, como $5 \in$ **A** y $5 \notin$ B, entonces, **A no es subconjunto de B**. Esto se denota como $A \not\subset B$ (Se lee: A no está contenido en B, o A no es subconjunto de B).

En particular, como el conjunto vacío no tiene elementos, es imposible que exista algún elemento en este conjunto que no pertenezca a otro conjunto cualquiera A. Por lo tanto, se concluye que el conjunto vacío es subconjunto del conjunto A.

Conjunto universal. Operaciones con conjuntos. Diagramas de Venn

Al trabajar con conjuntos es necesario definir un conjunto universal, en el que cada conjunto utilizado sea subconjunto de él, y el cual debe tener a todos aquellos elementos que intervienen en el proceso o problema a resolver. Por ejemplo, si trabajamos con el conjunto de números pares, un conjunto universal posible es el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) o también el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$). Si hablamos de los cuadrados, un conjunto universal podría ser el conjunto de los rectángulos o bien el conjunto de todos los cuadriláteros, esto muestra que el conjunto universal no es único y su selección depende del proceso o problema que se aborde. Para simbolizar al conjunto universal se empleará la letra **U**.

Ejemplo

Un par de conjuntos universal para los siguientes conjuntos: $A=\{x\ /x\in\mathbb{N}\}$ $B=\{0\}$ y $C=\{-1, -2, -3, -4,...\}$. Son las siguientes: $U=\{x/x\in\mathbb{Z}\}$, o bien, $U=\{x/x\in\mathbb{R}\}$.

Con los conjuntos, al igual que con los números, se pueden realizar algunas operaciones, tales como: la union, la intersección, la diferencia y el complemento. A continuación definimos estas operaciones.

Unión de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B, la unión de A y B, que se denota como **A∪B**, es el conjunto formado por todos aquellos elementos que estan en A o estan en B. En forma simbólica y por comprensión:

$$\mathbf{A \cup B= \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}}$$

Ejemplos

Sean $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$ y $C=\{9\}$

Entonces: $A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$,

$B \cup C=\{2, 4, 6, 8, 9\}$,

$A \cup B \cup C=U$.

Intersección de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B, la intersección de A y B, que se denota como **A∩B**, es el conjunto formado por todos aquellos elementos que son comunes a A y a B. En forma simbólica y por comprensión:

$$\mathbf{A \cap B=\{x/x \in A \text{ y } x \in B\}}$$

Nota: Si $A \cap B=\{\ \}=\phi$, los conjuntos A y B se llaman conjuntos disjuntos o ajenos.

Ejemplos

Sean los conjuntos $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$ y $C=\{9\}$

Entonces: $A \cap B=\{2, 4\}$, $B \cap C=\{\ \}$, $A \cap B \cap C= \phi$, $B \cap U=B$.

Diferencia de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B, la diferencia de A y B, que se denota como **A-B**, es el conjunto formado por todos aquellos elementos que estan en A y no estan en B. En forma simbólica y por comprensión:

$$A\text{-}B=\{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplos

Si $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$ y $C=\{9\}$

Entonces: $A-B=\{0, 1, 3, 5\}$, $B-A=\{6, 8\}$, $B-C=B$, $B-U=\phi$, $A-U=\{\ \}$, $U-A=\{6, 7, 8, 9\}$.

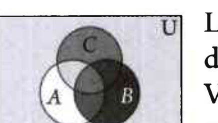
Complemento de conjuntos: Sean los conjuntos A y U, el complemento de A con respecto a U, que se denota como A^c, es el conjunto formado por todos aquellos elementos que no están en A pero que si están en U. En forma simbólica y por comprensión:

$$A^c=\{x/x \notin A \text{ y } x \in U\}$$

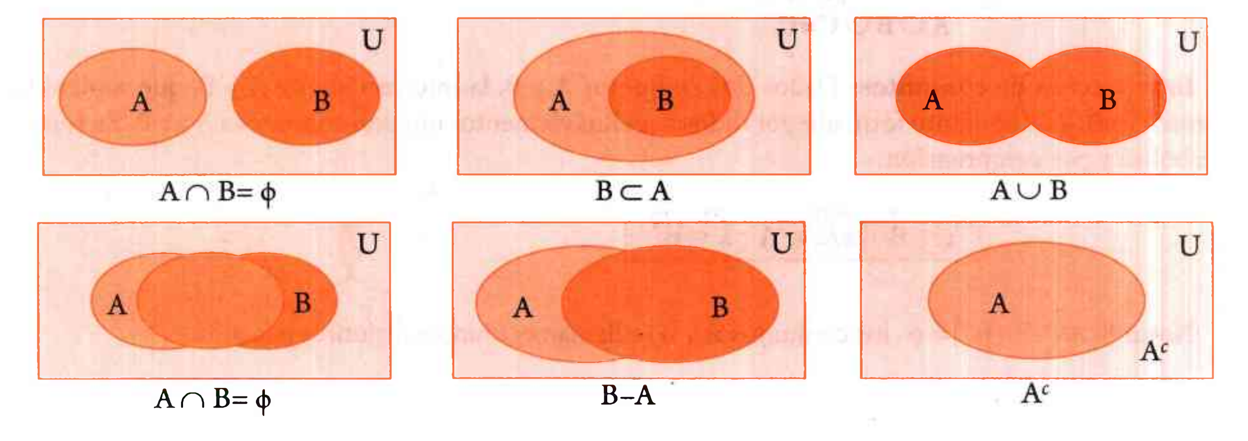
Ejemplos

Sean los conjuntos $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$ y $C=\{9\}$

Entonces: $A^c=\{6, 7, 8, 9\}$, $B^c=\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, $C^c=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $(A \cup B)^c= \{7, 9\}$, $(A \cap B)^c =\{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $U^c=\{\ \}$, $\phi^c=U$.



Las operaciones entre conjuntos pueden ser convenientemente representadas mediante regiones o figuras cerradas del plano que son conocidos como diagramas de Venn. Dichos diagramas son de mucha utilidad al momento de comprender y resolver problematicas que puedan plantearse en terminos de conjuntos. Por convención, se acostumbra representar al conjunto universal U con un rectángulo, mientras que cualquier subconjunto del mismo, deberá quedar incluido dentro del área del rectángulo, y sus elementos quedaran dentro de un círculo (o cualesquier curva cerrada) que lo represente. Así, si $A \subset U$ y $B \subset U$, entonces:



$A \cap B= \phi$ — $B \subset A$ — $A \cup B$

$A \cap B= \phi$ — $B-A$ — A^c

Actividades de aprendizaje

A1) Investiga, reflexiona, argumenta y consulta con tu maestro o maestra, sobre las siguientes cuestiones: ¿Por qué en matemáticas no se define el concepto conjunto? ¿Por qué un conjunto debe tener un criterio de definición claro y preciso?

A2) Tarea para investigar: ¿Son correctas las siguientes igualdades entre conjuntos? Explica a tus compañeros y compañeras tus respuestas.

(a) $\{3, 7, 5, 9\}=\{3, 5, 7, 9, 7\}$ (b) $\{3, 1, 2\}=\{3, \{1, 2\}\}$

(c) $\{3, \{1,2\}\}=\{\{2,1\},3\}$ (d) $\{x/x\in\mathbb{N}\ \text{y}\ 2x+8=18\}=\{x/\ 17<x<19\}$

A3) Sean los conjuntos A={1, 3, 5, 7, 9}, B={0, 2, 4, 6, 8, 10} y C={0, 1, 2, 3, 4}. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F)?

$1\in A$_____ $10\notin B$_____ $8\in B$_____ $5\notin C$_____ $4\in C$_____ $0\notin C$_____

$2\in B$ y $2\notin C$__________ $6\in B$ y $6\notin C$__________ $3\in A$ y $2\notin C$__________

$3\in A$ y $2\in A$__________ $6\in A$ y $6\notin C$__________ $10\in B$ o $6\in A$__________

$2\in B$ o $2\in A$__________ $8\notin B$ o $8\notin C$__________ $3\in A$ o $2\notin C$__________

A4) Sea el conjunto W={16, 12, 8, 4}. (a) Escribe 5 conjuntos que sean iguales a W, pero cuyos elementos estén ordenados en forma diferentes. (b) ¿Cuántos conjuntos iguales a W pueden escribirse y que solo difieran en el orden de sus elementos?

A5) Expresar mediante el método de comprensión los siguientes conjuntos:

A= {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35{= B= {1, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...}=

C= {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ... }= D= {7, 10, 13, 16, 19, ... }=

E= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}= F= {2, 4, 8, 16, 32, 64, ... }=

A6) Expresar mediante el método de extensión los siguientes conjuntos:

$A=\{4x\ /\ x\in\mathbb{Z}, 4<x<20\}=$ $B=\{9x\ /\ x\in\mathbb{N}, x>25\}=$

$C=\{x/\ x\in\mathbb{N},\ x<5\}=$ $D=\{(x,y)\ /\ x+y=10\}=$

$E=\{x/\ x\in\mathbb{Z},\ x+2=0\}=$ $F=\{t\ /\ t\in\mathbb{Z},\ t^2\ 16=0\}=$

A7) De los siguientes conjuntos determina cuales son finitos, infinitos o vacíos:

$A=\{4x\ /\ x\in\mathbb{N}, 4<x<20\}$ $B=\{9x\ /\ x\in\mathbb{N}, x>25\}$

$C=\{(x,y)\ /\ x+y=10\}$ $D=\{x/\ x\in\mathbb{N}\},\ x+2=0\}$

A8) Si T y W son conjuntos, y $T\subset W$ y $W\subset T$, entonces:____________

A9) ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto S={1, 2, 3, 4, 5} ?

A10) Sean los conjuntos N={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... }, Z={ ..., −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ... } , I={1, 3, 5, 7, 9, 11, ... }, P={2, 4, 6, 8, 10, 12, ... } y D={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Escribir "Falso" o "Verdadero", según sea el caso en las siguientes relaciones:

$I\subset\mathbb{N}$____ $D\subset\mathbb{Z}$____ $P\not\subset\mathbb{N}$____ $0\notin\mathbb{N}$____ $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$____ $\mathbb{Z}\not\subset\mathbb{N}$____ $\phi\not\subset\mathbb{Z}$____ $P\subset\mathbb{Z}$____

A11) Dar al menos un conjunto universal para los siguientes conjuntos:

$F=\{x / x-5=0\}$, $G=\{5, 10, 15, 20\}$ y $H=\{x / x\in\mathbb{N} \text{ y } x>4\}$

A12) Sea los conjuntos $U=\mathbb{Z}=\{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3,...\}$, $\mathbb{Z}^-=\{..., -3, -2, -1,\}$, $\mathbb{Z}^+=\{0, 1, 2, 3,...\}$, $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9...\}$, $P=\{2, 4, 6, 8,...\}$ e $I=\{1, 2, 3, 5,...\}$. Realiza las siguientes operaciones:

$I\cup P=$	$\mathbb{N}-P=$	$(\mathbb{Z}-\mathbb{Z}^+)^c=$
$\mathbb{Z}^+\cup\mathbb{Z}^-=$	$\mathbb{N}-I=$	$(P\cup I)^c=$
$\mathbb{N}\cup P^-=$	$\mathbb{Z}-\mathbb{N}=$	$(P\cap I)c=$
$\mathbb{Z}^+\cup\mathbb{N}=$	$((\mathbb{Z}^+)^c\cap\mathbb{Z}^-)^c=$	$\mathbb{N}^c\cap\mathbb{Z}^c=$

A13) Sí A, B, y C son subconjuntos cualesquiera del conjunto universal U, cuales de las siguientes relaciones u operaciones son Falsas o Verdaderas:

$A\cap A=A$____ $B\cup B=B$____ $C-C=\emptyset$____ $A\cap B=B\cap A$____ $U^c=\emptyset$____ $(A^c)^c=A$____

$A\cap\emptyset=\emptyset$____ $B\cup\emptyset=B$____ $\emptyset-C=\emptyset$____ $A-\emptyset=A$____ $B\cap B^c=\emptyset$____ $C\cup C^c=U$____

A14) Sí $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$ y $B=\{3, 4, 5, 6\}$, localice en diagramas de Venn los elementos de: U, A, $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$, A^c y B^c.

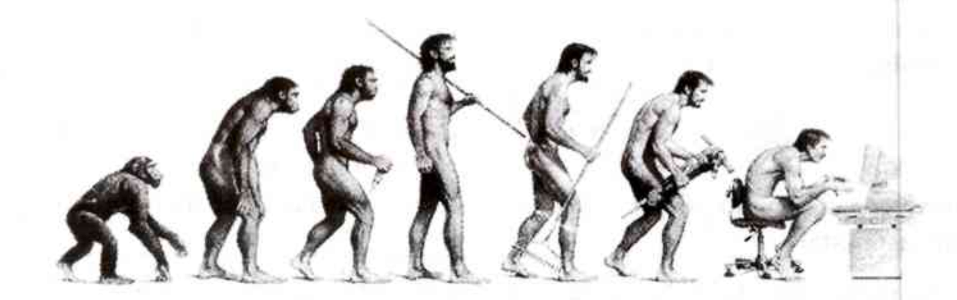
A15) En una entrevista efectuada por teléfono a 200 personas se encontró que en los domingos: 95 personas van al cine, 120 ven televisión en casa, 70 hacen las dos cosas, mientras que el resto ni van al cine ni ven televisión. Utilizando los diagramas de Venn determine ¿Cuántas personas de las entrevistadas: (a) van únicamente al cine sin ver televisión?, (b) ven únicamente televisión sin ir al cine? y (c) no hacen ninguna de las dos cosas?

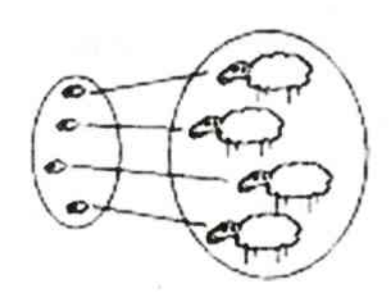
A16) En un barrio donde hay 31 personas, 16 compran en el mercado, 15 en la bodega y 18 en el supermercado; 5, en los dos últimos sitios; únicamente 6, en los dos primeros; y 7, en el primero y último. ¿Cuál es el menor número de personas que podrían comprar solamente en el mercado?

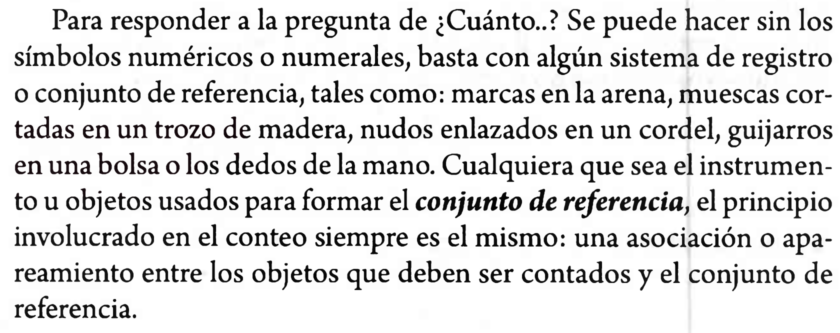
A17) Dos ciudades, A y B, se encuentran a una distancia de 300 km. De estas ciudades, salen dos ciclistas al encuentro uno de otro, avanzando a una velocidad de 50 km/h. Junto con el primer ciclista de la ciudad A, sale volando una mosca a una velocidad de 100 km/h. La mosca adelanta al primer ciclista y vuela el encuentro del segundo, que partió de B. Al encontrarse con él, la mosca da la vuelta en dirección al ciclista A. Encontrándose con éste, da nuevamente la vuelta hacia el ciclista B y así continúa sus vuelos, hacia adelante y hacia atrás, hasta que los ciclistas se encuentran. Después la mosca se tranquiliza y se posa en la gorra de uno de los ciclistas. ¿Cuántos kilómetros vuela la mosca?

1.2 Concepto de número y sistema numérico

¿Cómo surgieron los números? Es difícil saberlo con exactitud, sin embargo, en base a investigaciones históricas y antropológicas se pueden hacer conjeturas. Parece razonable suponer que el hombre primitivo tuvo alguna noción intuitiva de "más que" y "menos que". En la evolución de la civilización, los recursos del entorno posibilitaron algunas formas de dar respuesta a las preguntas cuantitativas relacionadas con los fenómenos u objetos.







Para responder a la pregunta de ¿Cuánto..? Se puede hacer sin los símbolos numéricos o numerales, basta con algún sistema de registro o conjunto de referencia, tales como: marcas en la arena, muescas cortadas en un trozo de madera, nudos enlazados en un cordel, guijarros en una bolsa o los dedos de la mano. Cualquiera que sea el instrumento u objetos usados para formar el ***conjunto de referencia***, el principio involucrado en el conteo siempre es el mismo: una asociación o apareamiento entre los objetos que deben ser contados y el conjunto de referencia.



A partir de esto, y en un proceso de abstracción creciente, el hombre desarrolló un conjunto de palabras para ser usado como un conjunto de referencia más conveniente o para mantener el registro de "cuantos". El siguiente paso consistió en pasar del lenguaje oral al escrito, después a los símbolos y al desarrollo de sistemas de numeración, finalmente a los sistemas numéricos.



Un **sistema de numeración** es un conjunto de símbolos que se usan para asignar símbolos numéricos a los números (numerales). Como ejemplos más conocidos tenemos el sistema de numeración romana (I, II, III, IV, V, etc.) y el sistema de numeración decimal (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9).

Un **sistema o conjunto numérico** está compuesto por un conjunto de números, operaciones definidas en los números del conjunto, y reglas que rigen dichas operaciones. Estos tres componentes del sistema determinan su ***estructura matemática.*** Cualquier cambio en uno de los componentes modifica el sistema y por ende su estructura.

1.3 El conjunto de los números naturales

Desde la primaria y la secundaria has estado haciendo cálculos y resolviendo problemas matemáticos en diferentes sistemas o conjuntos numéricos. Estos conjuntos son fundamentales para el trabajo y aprendizaje matemático que se desarrolle posteriormente, por lo cual es necesario que a continuación los recordemos y, además, profundicemos en el estudio de sus operaciones y propiedades.

Empezaremos con el más conocido y utilizado por la mayoría de las personas, nos referimos al sistema o conjunto numérico de los números naturales, que son los que cotidianamente utilizas para contar y resolver problemas de tu entorno. En notación de conjuntos los números naturales se representa como:



$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$



Observa que el conjunto de los números naturales es un conjunto infinito, ¿por qué? Reflexiona y explica tu respuesta: ____.

Hay que mencionar que algunos autores incluyen al cero (0) en el conjunto ℕ, otros no, atendiendo a diferentes criterios, esto es convencional. En este texto el cero se incluirá dentro del conjunto de los números enteros. Así, si al conjunto de los naturales le agregamos el cero obtendremos el conjunto de los **números enteros no negativos**, que se denotan como:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$$

Los elementos de $\mathbb{Z}^+$ pueden ser representados geométricamente asociándolos a puntos equidistantes uno del otro de una línea recta de la siguiente manera:

origen →   *a*   *b*   sentido positivo →

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...

Orden en los números naturales

Observa como la recta numérica de $\mathbb{Z}^+$ representa también una **sucesión ordenada** de los números naturales, pues: 1 es menor que 2 (1<2), 2 es menor que 3 (2<3), etc. Simbólicamente esto se denota como:

1<2 <3 <□<5 <6 <□<8 <□<10 <□<12...

En general, dados dos números naturales cualquiera *a* y *b*, si b esta localizado en la recta numérica de $\mathbb{Z}^+$ al lado derecho de *a*, entonces b es mayor que a, y se simboliza como: ***b*> *a* (*b* mayor que *a*) o *a* <*b* (*a* menor que *b*).** De donde:

2>[1] ; 3>[2] ; 4>□ ; 5>□ ; 6>□ ; 7>□;□>7;□>8 ; □>9 ; □>10 ; □>11...

Por último, si comparamos las magnitudes de dos números naturales *n* y *m*, resulta lógico concluir que no pueden ser simultáneamente iguales y diferentes, y en caso de que sean diferentes, necesariamente uno de ellos es mayor que el otro. Esto se conoce como ***ley de la tricotomía.*** Dados *m* y $n \in \mathbb{N}$, se cumple una y solo una de las siguientes relaciones: $m<n$ $m=n$ $m>n$.

Operaciones básicas de los números naturales

Con los elementos del conjunto de los naturales, como en todo sistema numérico, se realizan ciertas operaciones básicas (como la suma, la resta, la multiplicación y la división) que cumplen con ciertas reglas o propiedades generales.

Si a y $b \in \mathbb{N}$, entonces las operaciones básicas se representan como:

- Suma o adición: $a+b$. — Ejemplo: $12+100= 112$.
- Resta o sustracción: $a-b$. — Ejemplo: $325-279= 46$.
- Multiplicación: $a \times b= (a)(b)= a \cdot b= ab$. — Ejemplo: $5\times4=(5)(4)= 20$.
- División: $a \div b = \Leftrightarrow \frac{a}{b} \Leftrightarrow a/b \Leftrightarrow b\overline{)a}$. — Ejemplo: $12 \div 4=3 \Leftrightarrow \frac{12}{4} =3$.

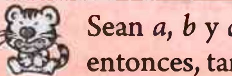


En la suma $a+b$, a y b se llaman ***sumandos***, de donde, en 12+100=112, 12 y 100 son sumandos de 112. En la multiplicación $a\times b$, a y b se llaman ***factores***, así en 5×4=20, 5 y 4 son factores de 20. También los números 60, 20 y 32 son sumandos de 112, en tanto que 10 y 2 son otro par de factores de 20. (Por qué?)

Múltiplos y divisores de un número natural

En la multiplicación anterior de 5×4=20, se dice que el 20 es un múltiplo de los factores 5 y 4. En tanto que los factores 5 y 4 son divisores de 20, ya que 20÷5=4 y 20÷4=5. De igual manera, 15 es un múltiplo de 1, 3 y 5, ya qué, 15=1×15=3×5=5×3. Y, a su vez, 1, 3 y 5 son divisores de 15, ya qué, 15÷1=15, 15÷3=5 y 15÷5=3.

De donde, un múltiplo (c) de un número natural (a), es el número que resulta de multiplicar el número natural (a) por otro número natural (b), o incluso por si mismo. Mientras que, un divisor (a o b) de un número (c) es todo aquel número que lo puede dividir de manera exacta. Dicho de otra manera, los factores de un número natural, son a su vez divisores de dicho número. Generalizando:



Sean a, b y $c \in \mathbb{N}$. Sí: $a\times b=c \Leftrightarrow c\div a=b$ y $c\div b=a$. Sí además, a y $b\neq1$, entonces, también, $c>a$ y $c>b$.

Si multiplicas por 2 a todos y cada uno de los elementos del conjunto de los números naturales, obtienes un nuevo conjunto P= {2, 4, 6, 8, 10, 12,...} llamado naturales pares que es a su vez subconjunto de los naturales. Si factorizamos los elementos de P, obtendremos que:

$$P= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}=\{2\times1, 2\times2, 2\times3, 2\times4, 2\times5, 2\times6, \ldots\}= \{p \,/\, p=2n,\ n\in \mathbb{N}\}$$

De donde, concluimos que los elementos "p" del conjunto P de los números naturales pares son múltiplos de 2 y pueden representarse, en general, como $p=2n$, con $n \in \mathbb{N}$. Si ahora, a todos y cada uno de los elementos de P le restas uno, ¿qué conjunto conocido resulta? I={ }. De donde, el conjunto de los naturales impares puede escribirse también como:

$$I=\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}=\{[(2\times1)-1], [(2\times2)-1], [(2\times3)-1], \ldots\}=\{w \,/\, ________,\ ______\}$$

¿Si multiplicas dos números naturales pares, el resultado es también par?____. Este resultado es importante, analicémoslo más en detalle, primero en lo particular y después en lo general. Inmediatamente nos percatamos de que: 2×4=8(par), 4×6=24 (par), y en general, $p_1 \times p_2 = 2n_1 \times 2n_2 = 2 \times 2 \times n_1 \times n_2$ (par, ¿por qué).

Cuando un número natural, diferente de uno, tiene como únicos factores o divisores al uno y él mismo, se llama ***número primo.*** En caso de que tenga más de dos divisores (o factores), se llama ***número compuesto.*** Así, como los únicos divisores de 7 son el 7 y el 1, entonces, 7 es número primo. Mientras qué, el 15 es un número compuesto, ya que tiene tres divisores (¿Cuáles son?________________).

Al proceso de descomponer un número cualquiera como producto de factores, se le llama **factorización.** Ejemplos: 60=2×2×3×5 = 4×15=2×30 = 12×5 = 10×6 = 3×20 y 42=2×3×7=6×7=2×21=3×14. De donde, el 60 y el 42 son números compuestos. Observa como en las factorizaciones posibles de este par de números, aparece una factorización donde todos los factores son números primos. De hecho existe el teorema fundamental de la aritmética donde se establece que:

Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número natural compuesto puede expresarse de forma única como un producto de números primos.

Un procedimiento práctico para factorizar un número, por ejemplo el 60, en sus factores primos es el siguiente:

$60 \div 2 = 30 \Rightarrow 60 = (2)(30)$
$30 \div 2 = 15 \Rightarrow 30 = (2)(15)$
$15 \div 3 = 5 \Rightarrow 15 = (3)(5)$
$5 \div 5 = 1 \Rightarrow 5 = (5)(1)$

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$\therefore$ 60= 2×30= 2×(2×15)= 2×2×(3×5)=2×2×3×5

Actividades de aprendizaje

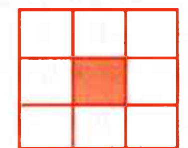
A1) ¿Como se llama el siguiente conjunto? ℕ={+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7,...}

A2) ¿Quién tiene más elementos de A y B? compara:_____



B

A3) ¿Cuántos cuadrados hay en esta figura? Cuenta:______



A4) ¿Cuál es el resultado de esta suma? Cuenta:________

1+3+5+7+...+47+49+50=?

A5) Completa con los símbolos “$>$” (mayor que) o “$<$” (menor que) para que las siguientes expresiones sean proposiciones correctas:

$39\square 12$; $4\square 9$; $213\square 140$; $2\square 1$; $127\square 245$; $123\square 25$.

A6) (a) Si: a, b y $c\in\mathbb{N}$, y se cumple que, $a=b+c$. ¿Qué relación de orden existe entre a, b y c?

$a\square b$ $\quad b\square a$ $\quad a\square c$ $\quad c\square a$ $\quad b\square c$ $\quad c\square b$.

(b) Si: a, b y $c\in\mathbb{N}$, y se cumple que, $a<b$ y $c>b$. ¿Qué relación de orden existe entre a y c?

$a\square c$.

A7) Aarón tiene una tarjeta de crédito con un saldo a favor de \$18,500.00, entra a una tienda de autoservicio y realiza las siguientes compras: una camiseta de \$168.00; un pantalón de \$579.00; unos zapatos tipo tenis de \$1,230.00 y un teléfono celular de \$4,985.00. ¿Cuál es su saldo después de pagar las compras con su tarjeta?

A8) (a) Un automóvil recorrió una distancia de 1,190 kilómetros en un tiempo de 14 horas. ¿Cuál fue su velocidad promedio de viaje? (b) ¿De cuantas maneras se le pueden poner las 4 llantas nuevas al automóvil?

A9) Completa con los símbolos “$>$” (mayor que) o “$<$” (menor que) para que las siguientes expresiones sean proposiciones correctas:

$127+315\square 245+232$; $(213-179)\square(140\div 4)$; $(123+27)\square(25)(7)$.

A10) Si: a, b y $c\in\mathbb{N}$, y se cumple que, $b>a$. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas?

$b+c>a+c$ ____________ $\quad b-c>a-c$ ____________ $\quad bc>ac$ ____________

A11) Un caracol trepa en línea recta por una pared de 15 metros, empezando desde la base. Cada hora sube un metro, pero su esfuerzo es tan grande que al final del primer metro descansa 2 minutos, al final del segundo metro descansa 4, y así sucesivamente hasta llegar al final. ¿Cuántos minutos tardara en llegar arriba?

A12) Una niña traviesa toca la puerta a intervalos iguales de tiempo. Si toca 6 veces la puerta en un tiempo de 35 segundos, ¿cuánto tardará en tocarla 12 veces?

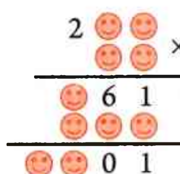
A13) Encuentra 5 rectángulos diferentes cuyas medidas de sus lados sean números naturales, y cuyo perímetro sea igual a 200 metros. Además, determina cuál de los rectángulos tiene el área máxima. ¿De qué depende el área de estos rectángulos?

A14) Sofía planea hacer una rifa, y decide elaborar 100 números numerados del 1 al 100, la persona que participe seleccionará un número al azar y pagará una cantidad en pesos igual al número seleccionado. Si el objeto que se rifa tiene un costo de \$875.00, ¿cuánto ganaría Sofía si logra vender todos los números?

A15) ¿Cuál será el costo de 120 varillas de 24 metros de longitud por unidad, si cada metro lineal cuesta \$15.00?

A16) ¿Cuántas parejas diferentes de factores naturales existen cuya multiplicación da como resultado 19?

A17) En las siguientes multiplicaciones, detrás de cada carita está oculto un dígito, ¿eres capaz de encontrarlos?



			☺	1	☺	
			3	☺	2	×
			☺	3	☺	
	3	☺	2	☺		
☺	2	☺	5			
1 ☺	8	☺	3	0		

A18) Verificar que las fórmulas de sumatoria:

$$1+2+3+...+(n+1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

son válidas para los números naturales 4, 5, 8, 9, 12, 17 y 20.

A19) Completa lo siguiente:

- 4 múltiplos de 8 son: ____ ____ ____ ____
- 2 factores de 6 son: _____ y _______
- 2 factores de 42 son:_____ y _______
- 3 divisores de 6 son:______ y ______y ______

A20) Factoriza el 90 en todas sus formas posibles: 90=_________________________. ¿Alguna de estas factorizaciones está formada únicamente de factores primos? En caso afirmativo escríbela: ____________.

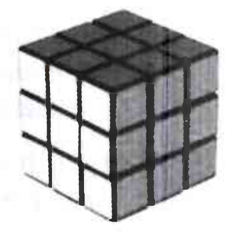
A21) Encuentra 10 números que sean múltiplos de 3, y 10 números que sean múltiplos de 8. Además, determina tres números que sean múltiplos comunes para este par de números y encuentra cual es el menor de ellos.

A22) Intenta elaborar o construir una argumentación (o demostración) matemática convincente para el siguiente teorema: Si se multiplica un número natural par por si mismo, el resultado es también natural par. (Coméntalas con tu maestra o maestro)

A23) Encuentra los divisores de 50, y determina si se trata de un número primo o de un número compuesto. Si es número compuesto, factorízalo en sus factores primos.

A24) Determina el conjunto de los números primos menores que 100.

Potencias de un número natural



Si en una multiplicación los factores se repiten, la operación se puede abreviar a través de potencias. Por ejemplo, la factorización de 60=2×2×3×5, se puede abreviar como: $60=2^2\times3\times5$; de donde, la potencia $2^2=2\times2$. De igual manera, el volumen (V) de un cubo de lado a=3 cm puede expresarse como:

$$V=(3\text{ cm})(3\text{ cm})(3\text{ cm})=(3\text{ cm})^3=27\text{ cm}^3.$$

O en general: $V=a\times a\times a=a^3$

La multiplicación abreviada en forma de potencias, como 3^3 o a^3, resulta ser fundamental para la comprensión y desarrollo de la conceptualización y operatividad algebraica. En suma, en una potencia

el número que se multiplica por si mismo se llama **base** y el número que indica las veces que se multiplica la base se llama **exponente**, así, en $2^7=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=128$, el 2 es la base y el 7 el exponente de la potencia 2^7, mientras que el 128 es el valor de la potencia o el resultado del proceso de potenciación.

En general, si $a\in\mathbb{N}$ y $n\in\mathbb{N}$, la multiplicación del número natural a por sí mismo n veces se representa como:

$$a\times a\times a\times a\times\ldots\times a=a$$

Donde: a es la base y n (veces que se repite el factor a) es el exponente de la potencia a^n.

Ejemplos | $4\times4\times4=4^3$; $13\times13\times13\times13\times13=13^5$; $9\times9\times9\times9\times9\times9\times9\times9=9^8$.

Nota: Cuando el exponente de una potencia es 1, la escritura de dicho exponente suele omitirse, o sea, su escritura es opcional. Así: $4^1=4$, $32^1=32$, y $a^1=a$.

Como las potencias son finalmente números, entonces también se pueden realizar con ellas las operaciones básicas y derivar de las mismas algunas propiedades importantes. Por ejemplo, podemos generalizar las siguientes operaciones:

$7^2\times7^3=(7\times7)\times(7\times7\times7)=7^5=7^{2+3}$

$(5^2)^3=5^2\times5^2\times5^2=(5\times5)\times(5\times5)\times(5\times5)=5^6=5^{2+3}$

$(3\times2)^4=(3\times2)(3\times2)(3\times2)(3\times2)=(3\times3\times3\times3)(2\times2\times2\times2)=3^4\times2^4$

para obtener las siguientes leyes de exponentes para las potencias:

Sí: $a, b, m, n\in\mathbb{N}$, entonces:

$a^n\times a^m=a^{n+m}$; $(a^n)^m=a^{nm}$; $(a\times b)^n=a^n\times b^n$

Con la notación y propiedades de las **potencias** se puede facilitar la escritura y los cálculos de operaciones complejas como las siguientes:

$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^7=128$

$(2\times2\times2\times2\times2\times2\times2)\times(5\times5\times5)=2^7\times5^3=128\times125=16000$

$(8\times8\times8\times8\times8)\times(6\times6\times6\times6)=8^{\square}\times6^{\square}=$ ____________ × __________ = ____________________

$(7\times7\times7)\times(7\times7\times7\times7\times7)=7^{\square}\times7^{\square}=7^{\square+\square}=$ ______________________

$(20\times20)\times(20\times20\times20\times20\times20\times20\times20\times20)=20^2\times20^8=20^{\square}=$ ____________________

$3^5\times3^2\times3^4=3^{5+2+4}=3\quad=$ ____________________

$(6^3)^4=6^{\square}=$ ______________________

$(2^4)^2\times(2^3)^5=2^{\square}$ $(3^2\times5^3)^2=(3^2)^2\times(5^3)^2=$ _______ × _______ = _______________.

Algunas relaciones entre la suma, la multiplicación y la división

En ciertas ocasiones es necesario realizar sumas con números naturales repetidos. Por ejemplo: ¿Cuál es el costo total de 6 CDs, si cada uno de ellos tiene un precio de \$5? La solución es: \$(5+5+5+5+5+5)=\$30. Esta operación, como ya sabes, por conveniencia se abrevia de la siguiente manera: $5+5+5+5+5+5=6\times5=30$.

Esto es importante porque muestra que, en general, la multiplicación puede ser considerada como una suma abreviada. De donde, si $a\in\mathbb{N}$ y $m\in\mathbb{N}$, y se tiene la suma de m veces el número natural a, entonces:



$$\underbrace{a+a+a+a+...+a}_{m \text{ veces } a}= m\times a$$

Ejemplos

$6+6+6+6+6+6+6=7\times6=42$
$16538=1\times16538$
$8+8+5+5+5=(2\times8)+(3\times5)=16+15=31$
$2^2+2^2+2^2+2^2+2^2=5\times2^2=5\times4=20$
$(4+6)+(4+6)+(4+6)=3\times(4+6)=3\times10=30$
$(a+b)+(a+b)+(a+b)=3\times(a+b)$; a y $b\in\mathbb{N}$.

Otro resultado que muestra una relación específica entre la división, la multiplicación y la suma de números naturales, es el conocido e importante **algoritmo de la división.** Para ilustrarlo, analicemos las siguientes divisiones:

2 (=c)	3 (=c)	6 (=c)
(d=) 3⟌7 (=D)	(d=) 9⟌31 (=D)	(d=) 15⟌100 (=D)
1 (=r)	4 (=r)	10 (=r)

En los tres ejemplos anteriores se observa que: D, d, c y $r\in\mathbb{N}$, $D>d$, $r<d$, y, además, d no es divisor de D, y finalmente que $7=(3\times2)+1$, $31=$____________ $100=$_____________.

Generalizando los ejemplos anteriores:

Algoritmo de la división:
Cuando D y $d\in\mathbb{N}$, $D>d$ y, además, d no es divisor de D, entonces, existen los naturales c y $r<d$, tales que:
$D=dc+r$.

Otro ejemplo: 21 y 9 son naturales, $21>9$, 9 no es divisor de 21, por tanto existen los naturales $c=2$ y $r=3<9$, tales que: $21=(9\times2)+3$.

Actividades de aprendizaje

A1) Cuatro parejas de amigos se reúnen para una cena. Al final de la cena, Ana se ha comido 4 tortillas; Eloiza, 3; Sofía, 2, y Cinthya, 1. Marcos se ha comido las mismas que su mujer; Aarón, el doble que la suya; Manuel, el triple que la suya, y Héctor, cuatro veces más que la suya: Si en total todos se comieron 32 tortillas. ¿Cómo están formadas las parejas?

A2) Abrevia y/o encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

a) 20+20+20+20=_______=_______
b) 3+3+3+3+3+3+3+3=______=______
c) a=______=_______
d) $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$ =_________=_______=_________
e) 8+8+8+12+12+12=______+_____=_____+______=_______
f) $(a+b)^3 + (a+b)^3 + (a+b)^3 + (a+b)^3 + (a+b)^3$ =____________

A3) Escribe las siguientes multiplicaciones, o resultados, como sumas de números naturales repetidos:
a) 7×8=________________________
b) 5×10^3 =_________________
c) 24=______=__________________
d) $5n$=_______________________
e) $4\times(a+b)^5$ =____

A4) Determina si son Falsas o Verdaderas las siguientes operaciones:

a) $20^1 = 20$ ________
b) 5×5×5=15_______
c) $5\times5=5^2$ ________
d) $5\times5\times5\times5\times5=5^5$ _____
e) $5^3\times5^2= 5^{3+2}$ ______
f) $5^3\times5^2= 5^5$ ______
g) $8^3\times8^2 = 8^{3+2} = 8^5$ _____
h) $12^4\times12^3 = 12^{4+3} = 12^7$ _____
i) $(3^4)^5 = 3^{20}$ _____
j) $(11^4)^2= 11^6$ _____
k) $(2507)^3 = 250^{21}$ _____
l) $[(a+b)^5]^2 =(a+b)^{10}$ _____

A5) Determine el valor de k ($k\in\mathbb{N}$) en cada uno de los siguientes casos para que la igualdad sea verdadera:

a) $3^k =27$; k=______
b) $2^3\times2^k = 2^{10}$; k=_________
c) $9^k\times9^6 = 9^8$; k=_____
d) $(8^3)^k = 8^{15}$; k=_________
e) $(4^k)^8 = 8^{24}$; k=________
f) $((2+3)^3)^k = 5^6$; k=_______
g) $k + 5^2= 40$; k=_______
h) $3k-10= 50$; k=_______

A6) Un tabernero tiene un barril de cerveza y cinco barriles de vino. Vende una determinada cantidad de vino a un cliente, y el doble de esa cantidad a otro, tras lo cual se queda sin vino. Sabiendo que el vino lo vende por litros enteros, y que las capacidades de los barriles son de 15, 16, 18, 19, 20 y 31 litros, ¿cuántos litros de cerveza tiene el tabernero?

A7) En el algoritmo de la división: $D=dc+r$. (a) ¿Qué implicaciones tendría si r=0?
(b) ¿Por qué debe ser $r<d$?

A8) Utiliza el algoritmo de la división para establecer una relación de igualdad que involucre los elementos de cada uno de los siguiente conjuntos de números naturales:{5, 22, 4, 2}, {27, 17, 622, 35}, {47, 1239, 17, 47}, {1, 3, 4}.

Máximo común divisor (MCD)

Frecuentemente se presentan problemas donde es necesario determinar lo que en aritmética se conoce como máximo común divisor (MCD). Ejemplo: Un negocio que vende materiales de construcción debe transportar varillas de 30 y 45 metros de longitud, pero, para facilitar y optimizar el transporte deben cortar las varillas en trozos iguales de máxima longitud. ¿De que longitud deben cortarse los trozos?____________________.

Una manera de resolver este problema es la siguiente: primero determinamos mediante divisiones el conjunto de los factores o divisores de 30, que es A={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, y después el conjunto de los factores o divisores de 45, que son B={1, 3, 5, 9, 15, 45}. De donde, el conjunto formado por $A \cap B$={1, 3, 5, 15} es el conjunto de los divisores comunes de 30 y 45, y el elemento mayor del mismo es el máximo común divisor de ambos números. Por tanto, para este par de números el MCD=15, y las varillas deben cortarse en trozos de 15 metros cada una.

Determinar el MCD de dos o más números a partir de la elaboración previa de la lista de los divisores de dichos números, es laborioso y puede llevar mucho tiempo. Un algoritmo mas práctico para encontrar el MCD de dos o más números, consiste primeramente en factorizar cada uno de los números en sus factores primos, después el MCD se determina multiplicando los factores comunes encontrados tomándolos con su menor exponente. Por ejemplo, para 30 y 45 el MCD es:

30|2
15|3
5|5
1

$\therefore 30 = 2 \times 3 \times 5$

45|3
15|3
5|5
1

$\therefore 45 = 3^2 \times 5$ ------> $\therefore$ MCD= $3 \times 5 = 15$

De igual manera, el MCD de 24, 32 y 20 es:

32|2
16|2
8|2
4|2
2|2
1

$\therefore 32 = 2^5$

24|2
12|2
6|2
3|3
1

$\therefore 24 = 2^3 \times 3$

20|2
10|2
5|5
1

$\therefore 2^2 \times 5$ $\therefore$ MCD= $2^2 = 4$

Otro método para encontrar el MCD es usar el *Algoritmo de Euclides*, y consiste en dividir el número mayor entre el menor. Si el residuo obtenido es diferente de cero, se divide el divisor anterior entre el residuo obtenido, y si el nuevo residuo sigue siendo diferente de cero, entonces se repite el proceso hasta obtener un residuo igual a cero. El último residuo diferente de cero obtenido es el MCD de los números dados. Así, para 30 y 45 obtendremos que:

$45 \div 30 = 1$, residuo 15

$30 \div 15 = 2$, residuo 0

$\therefore$ el MCD=15 (resultado que coincide con el esperado)

Mínimo común múltiplo (mcm)

Otro tipo de problemas interesantes de la Aritmética son aquellos que tienen relación con el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales. Por ejemplo: si Pedro y su esposa Guadalupe hacen ejercicio juntos por las mañanas en la misma pista de caminata, y Pedro da una vuelta en 4 minutos mientras que Guadalupe lo hace en 5 minutos, ¿cuántas vueltas tienen que dar cada uno para que vuelvan a coincidir en el punto de partida? ____.

Una solución al problema anterior es la siguiente: de entrada los números naturales nos sirven para contar las vueltas que den cada uno de los caminantes y, además, a partir de ellos podemos generar los múltiplos de 4 y 5 simplemente multiplicándolos por dichos números, así los múltiplos de 4 son el conjunto C={4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40,…} y los múltiplos de 5 son el conjunto D={5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40,…}. De donde, sus múltiplos comunes son los elementos de $C \cap D$={20,40,…}. Por tanto, el mínimo común múltiplo de ambos números es mcm=20. En consecuencia, Pedro y Guadalupe coinciden después de 20 minutos de caminata y cuando han completado 5 y 4 vueltas respectivamente.

Un algoritmo práctico para encontrar el mcm de dos o más números, consiste primeramente en factorizar cada uno de los números en sus factores primos, después el mcm se determina multiplicando los factores comunes (tomados con su mayor exponente) y no comunes encontrados. Por ejemplo, para 8 y 12 el mcm es:

8	2		12	2		
4	2	$\therefore\ 8 = 2\times2\times2 = 2^3$	6	2	$\therefore\ 12 = 2^2\times3$	$\therefore$ mcm $= 2^3\times3 = 24$
2	2		3	3		
1			1			

En caso de que se quiera el mcm de tres números se procede de igual manera. Así, el mcm de 24, 32 y 20 es:

32	2		24	2		20	2		
16	2		12	2		10	2		
8	2		6	2		5	5		
4	2	$\therefore\ 32 = 2^5$	3	3	$\therefore\ 24 = 2^3\times3$	1		$\therefore\ 20 = 2^2\times5$	$\therefore$ mcm $= 2^5\times3\times5 = 480$
2	2		1						
1									

Propiedades de las operaciones básicas de los números naturales

Algo que es importante resaltar es que tanto en la suma como en la multiplicación de naturales los resultados son también números naturales (Propiedad de cerradura), y, además también son únicos. En el caso de la resta y la división de dos números naturales no se cumple en general la propiedad de cerradura. Por ejemplo, en 15−10=5 y 12÷3=4 se cumple, pero en, 8−10=−2 y 4÷5=0.80 no se cumple (¿Por qué?).

Cuando la resta y la división dentro de los naturales se pueden realizar, ambas operaciones pueden replantearse en términos de suma y multiplicación respectivamente. Ejemplo, las operaciones: 15−10=? ⇔ 15=? +10 y 12÷3=? ⇔ 12= ? Pueden reformularse respectivamente de esta otra manera:

15−10=? ⇔ 15=? + 10 ¿Qué número sumado con 10 da como resultado 15?

12÷3=? ⇔ 12= ? ¿Qué número multiplicado por 3 da como resultado 12?

En razón de lo anterior se dice que dentro del conjunto de los naturales, la suma y la multiplicación son las operaciones fundamentales. Estas operaciones cumplen con las siguientes propiedades, las cuales podrás verificar su validez realizando en la tabla de abajo (completar tabla) las operaciones particulares ahí indicadas.

Operaciones particulares	Generalizando: Sean $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$	Nombre de la propiedad
1379 + 548=	$a+b \in \mathbb{N}=$	Cerradura para la suma
2485 × 976=	$a \times b \in \mathbb{N} =$ o $ab \in \mathbb{N}$	Cerradura para la multiplicación
8+5= 13 5+8=	$a+b= b+a$	Conmutativa para la suma
7 × 9= 63 9 × 7=	$a \times b= b \times a$	Conmutativa para la multiplicación
(1+2)+3=6 1+(2+3)=	$(a+b) + c = a+(b+c)$	Asociativa para la suma
(10 ×5) ×4= 200 10 × (5×4) =	$a \cdot (b \cdot c)= (a \cdot b) \cdot c$	Asociativa para la multiplicación
12 × (25+75)=1200 (12 × 25)+(12 × 75)=	$a\ (b+c)= ab+ac$	Distributiva
27 × 1= 27 ; 328 × 1=	$a \times 1= a$	Idéntico multiplicativo

Signos de agrupación y orden en las operaciones

Como consecuencia de las propiedades asociativas para las sumas y multiplicaciones, no existe confusión al momento de sumar o multiplicar más de dos números, ya que el resultado de la operación es independiente del orden en que se asocien o agrupen los sumando o los factores, por ejemplo:

$$1+2+3=(1+2)+3=3+3=6 \quad \text{o} \quad 1+2+3=1+(2+3)=1+5=6$$

$$10\times5\times4=(10\times5)\times4=50\times4=200 \quad \text{o} \quad 10\times5\times4=10\times(5\times4)=10\times20=200$$

Sin embargo, si se tiene la operación combinada 10×5+4, aquí se hace necesario precisar el agrupamiento de los números y el orden de las operaciones, ya que el resultado depende de dicho orden. Veámoslo:

$$10\times5+4=(10\times5)+4=50+4=54 \qquad 10\times5+4=10\times(5+4)=10\times9=90$$

Como se infiere de este ejemplo, el agrupamiento de los números con sus operaciones mediante el uso del paréntesis ( ) determina ya un orden de las operaciones, de tal manera que la operación dentro de él es la que debe realizarse en primer termino.

Se puede presentar el caso donde se requiera más de un paréntesis, por ejemplo si en la operación 10×5+4÷2, lo que se quiere es sumar al resultado de 10×5 el resultado de 4÷2, entonces, la

forma conveniente de usar los paréntesis y de operar es: $(10\times5)+(4\div2)=50+2=52$. Pero, si lo deseado es dividir entre dos, el resultado de multiplicar 10 por la suma de 5 y 4, entonces, los agrupamientos y el orden de las operaciones a través del uso de los paréntesis quedarían determinadas como:

$$(10\times(5+4))\div2=(10\times9)\div2=90\div2=45$$

En este último ejemplo, para no repetir dos veces el paréntesis se acostumbra usar el corchete [ ] en sustitución del paréntesis externo. De esta manera la operación se puede escribir también como: $[10\times(5+4)]\div2=[10\times9]\div2=[90]\div2=45$. Incluso, toda la operación puede ser rescrita de esta otra manera: $\{[10\times(5+4)]\div2\}$. El convenio del orden es, pues, el siguiente: primero se hacen las operaciones dentro de los paréntesis (y en caso de haya más de dos paréntesis, tiene preferencia el mas interno), segundo las que están dentro de los corchetes y tercero las que estén dentro de las llaves.

En suma, cuando se tienen operaciones combinadas de más de dos números que requieran de precisar el orden de las operaciones, es conveniente el uso de símbolos especiales como los paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }. En la escritura y agrupamiento de las operaciones estos símbolos quedan ordenados de la siguiente forma: { [( )] }.

Cuando en una expresión como $10+5\times9\ 6\div3$ no aparece ningún símbolo de agrupamiento u orden, entonces, para evitar confusiones, se aplican los siguientes convenios para el orden de las operaciones:

- Primero: se realizan de izquierda a derecha todas las multiplicaciones y divisiones.
- Segundo: se realizan de izquierda a derecha todas las sumas y restas.

Así, para la expresión anterior el resultado es: $10+5\times9-6\div3=10+90-2=100-2=98$.

Actividades de aprendizaje

A1) Factoriza los números 45, 650 y 321 como producto de sus factores primos.

A2) Encuentra el MCD de los siguientes números:

(a) 6 y 14 (b) 45 y 1350 (c) 650 y 1274 (d) 17, 150 y 315

A3) Obtener el mcm de los siguientes números:

(a) 12 y 18 (b) 54 y 132 (c) 7 y 11 (d) 17, 150 y 315

A4) En una escuela preparatoria de la UAS, se hizo entre los alumnos una colecta voluntaria para los damnificados de un ciclón. Se recolectaron 150 Kg de frijol, 70 kg de harina de trigo y 90 kg de arroz. Se haran despensas que contengan un número exacto de kg de cada alimento, ¿cuál es el número máximo de despensas que pueden hacerse, y cuantos kilogramos en total, y de cada producto deberán tener?

A5) Tres amigas de Culiacán que hacía tiempo no se veían coinciden un día en el aeropuerto de la ciudad, ya iniciada la plática se dan cuenta que las tres viajan frecuentemente a Guadalajara en el mismo horario, pero una de ellas lo hace cada 15 días, otra cada 10 días y la última cada 8 días. Si continúan viajando las amigas con la misma frecuencia, ¿en cuántos días más volverán a coincidir en el aeropuerto?

A6) Determina si son correctas las siguientes operaciones, y escribe el nombre de la propiedad que se utilizó en cada una de ellas:

$30+40=40+30=70$;	Propiedad:____________________
$153\times967=967\times153=147951$;	Propiedad:____________________
$(3)(8)+(3)(12)=3\times(8+12)=3\times20=60$;	Propiedad:____________________
$(34)+(8+6)=(34+8)+(6)=42+6=48$;	Propiedad:____________________
$7\times(9\times2)=(7\times9)\times2=63\times2=126$;	Propiedad:____________________

A7) Realiza las siguientes operaciones:

- $20+15\times9\ 12\div4=$
- $[(20+15)\times9]\ (12\div4)=$
- $20+\{15\times[9\ (12\div4)]\}=$
- $(20+15)\times[9\ (12\div4)]=$

A9) Escribe un ejemplo de resta, y otro de división, de números naturales donde no se cumpla la propiedad de cerradura.

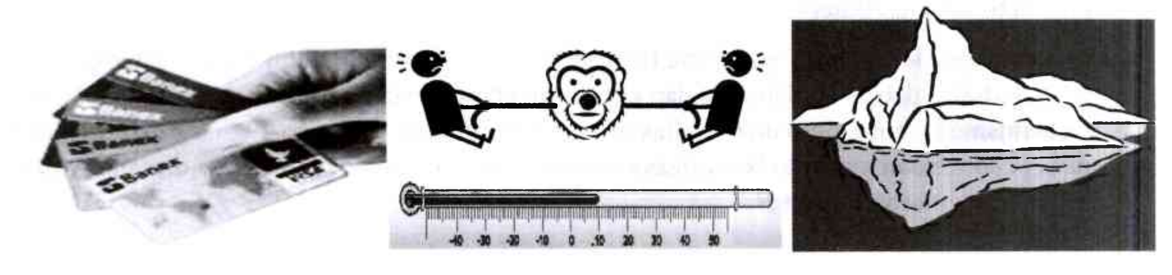
A10) ¿Cuánto es la mitad de cuatro más seis? Compara y discute tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

A11) Simboliza y realiza correctamente la siguiente operación: el cuadrado de la suma de 6 con 3, menos el doble de 5, es igual a:____________________________.

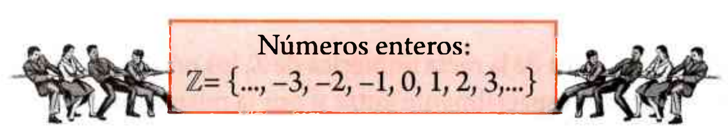
1.4 Números enteros

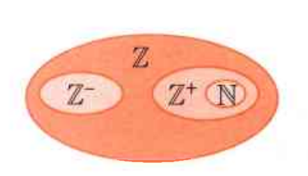
El conjunto de los números naturales aunque son de mucha utilidad, lo cierto es que resultan insuficientes para la resolución matemática de muchos problemas prácticos que se le presentan al hombre. Por ejemplo, si Aarón usa su tarjeta de crédito cuyo saldo es de \$ 13,500.00, y hace un gasto de \$15,000.00, entonces su nuevo saldo sería de \$(13500–15000)=¿_________? Este resultado no puede ser expresado con números naturales, ¿por qué?____.

Otra situación en la que los números naturales son insuficientes es cuando se quiere modelar matemáticamente los cambios de temperatura de una región. Por ejemplo, si en un día de invierno de la ciudad de México la temperatura registrada al medio día es de 15° y durante la noche desciende hasta –5°, ¿Cuál ha sido el cambio de temperatura?______.



La limitación anterior, de los números naturales, de hecho quedo expresada cuando se señaló que bajo la operación de resta no cumplían con la propiedad de cerradura. Así pues, para ampliar las posibilidades del uso de los números se requiere del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ (o números con signo como se les denomina en la secundaria), los cuales ya se presentaron anteriormente en el tema de los conjuntos y fueron definidos como:

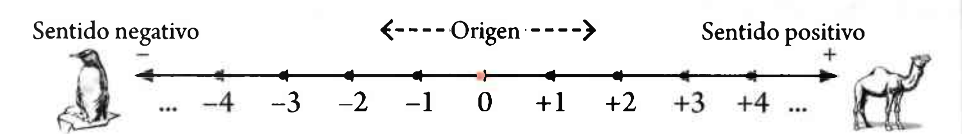




Como se observa, el conjunto infinito de los números enteros resulta de la unión del conjunto de los enteros negativos $\mathbb{Z}^{-}= \{..., -3, -2, -1\}$ con el conjunto de los enteros no negativos $\mathbb{Z}^{+}= \{0, 1, 2, 3,...\}$: $\mathbb{Z}= \mathbb{Z}^{-} \cup \mathbb{Z}^{+}$. Además, se infiere de inmediato que los números naturales son un subconjunto de los enteros: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Esta relación entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ es de suma importancia para el estudio de las operaciones y propiedades de los números enteros, ya que el hecho de que $\mathbb{Z}$ sea una ampliación de $\mathbb{N}$, o de que los números naturales también sean enteros, nos permitirá retomar y/o ampliar muchos de los conocimientos aprendidos con relación a $\mathbb{N}$.

Representación gráfica y orden de los enteros

Al igual que los números naturales, los números enteros se representan gráficamente en una recta asociando puntos equidistantes con números de la siguiente manera:



A partir de su representación gráfica se observa que:

- ✓ El conjunto de los números enteros resultan de la unión de los enteros positivos (o naturales), enteros negativos y el cero. Los signos + y – que llevan los números enteros no son signos de operaciones (suma, resta), sino que indican simplemente el sentido o la cualidad de ser positivos o negativos.
- ✓ El conjunto de números enteros es infinito, y no tiene ni primer ni último elemento. O sea, todo número entero (n) tiene un antecesor (n–1) y un sucesor (n+1).
- ✓ La recta numérica de $\mathbb{Z}$ representa también una sucesión ordenada de los enteros. O sea, para todo par de números enteros comparados, siempre el de la derecha es el mayor, de donde: $... > 4 > 3 > 2 > 1 > 0 > -1 > -2 > -3 > -4 > ...$

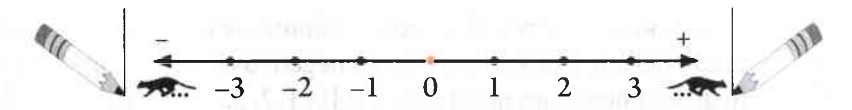
En general, dados dos números enteros cualquiera a y b, si b esta localizado en la recta numérica al lado derecho de a, entonces b es mayor que a, y se simboliza como: **$b > a$ (b mayor que a), o equivalentemente, $a < b$ (a menor que b).** De donde: $... > 2 > 1 > 0 > -1 > -2 ... \Leftrightarrow ... < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 ...$

En los números enteros, como en los números naturales, también se cumple la ley de la tricotomía. Si m y $n \in \mathbb{Z}$, entonces, una y solo una de las siguientes relaciones es verdadera:

$$\boxed{m<n} \quad \boxed{m=n} \quad \boxed{m>n}.$$

Valor absoluto de números enteros

Por construcción geométrica o física de la recta numérica de $\mathbb{Z}$, los números enteros, que están representados por puntos, están separados espacialmente entre si por la misma unidad de longitud.



De donde, podemos decir que la ***distancia*** (considerada positiva) que existe del:

-1 al 0, es la misma que hay del $+1$ al 0; lo que se simboliza como: $|-1|=|+1|=1$

-3 al 0, es la misma que hay del $+3$ al 0 ; lo que se simboliza como: $|-3|=|+3|=3$

-9 al 0, es la misma que hay del $+9$ al 0 ; lo que se simboliza como: $|-9|=|+9|=9$

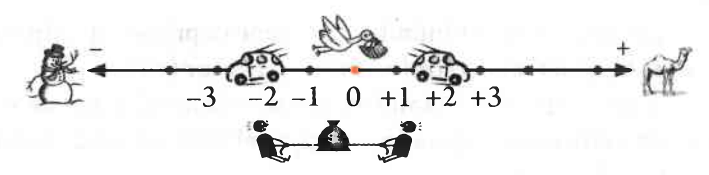
"$-n$" al 0, es la misma que hay de "n" al 0 ; lo que se simboliza como: $|-n|=|n|$.

A las expresiones $|-1|=1, |1|=1, |-3|=3, |3|=3, |-9|=9, |9|=9$ se les llama ***valor absoluto*** de -1, $+1$, -3, $+3$, -9 y $+9$ respectivamente.

Dos números enteros diferentes de igual valor absoluto, o que se encuentran a la misma distancia del origen, se llaman ***simétricos*** u opuestos entre si, de donde: -1 y $+1$ son simétricos, al igual que $+3$ y -3, etcétera.

Operaciones y propiedades de los números enteros

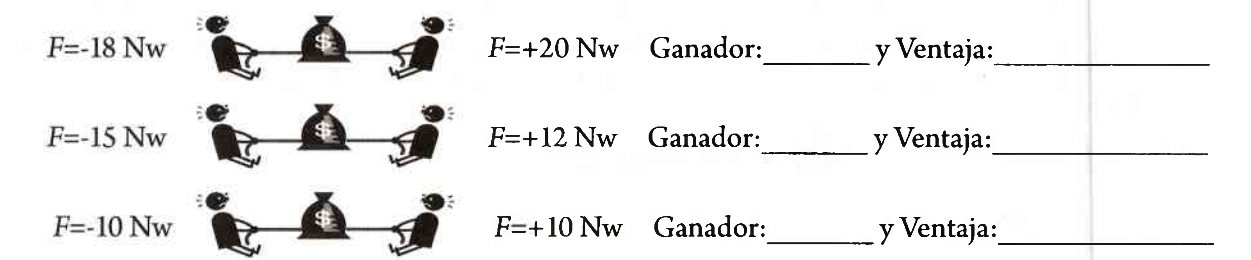
Como ya se puso de manifiesto anteriormente, los números enteros surgen en la idea de modelar y resolver matemáticamente problemas que se caracterizan por tener posibles resultados con sentidos opuestos, tales como: saldo a favor o saldo en contra en el caso del uso de una tarjeta de crédito; arriba de cero o abajo de cero en el caso de las temperaturas de una región o lugar; desplazamientos hacia la derecha o hacia la izquierda en el caso del movimiento mecánico lineal; etcétera.



De esta manera, si una persona tiene un saldo a favor (haber) de \$5,000.00 en su tarjeta de crédito, su estado financiero se puede representar convenientemente con un entero positivo como: +5000. Mientras que un saldo en contra (deuda) de \$5,000.00, se representaría por un número entero negativo como: –5000. Desde esta lógica, si la persona con un saldo de +5000 en su tarjeta de crédito:

- depositara en su cuenta la cantidad de \$2,000.00, ¿cómo representarías matemáticamente esta operación financiera?________________________________
- hiciera un pago con su tarjeta de \$5,000.00, ¿cómo representarías matemáticamente esta operación financiera?________________________________
- hiciera un pago con su tarjeta de \$7,000.00, ¿cómo representarías matemáticamente esta operación financiera?________________________________

También el juego de la cuerda, que consiste en dos grupos de personas tirando con cierta fuerza "*F*" de una cuerda en sentidos opuestos, se puede modelar con los números enteros. ¿Quién ganara, y con qué ventaja, en los siguientes jalones de cuerda?



Suma de números enteros

Cuando se suman dos números enteros se pueden presentar los siguientes tres casos, que ambos sean positivos, o ambos negativos, o que sean de signo contrario.

Primer caso: los sumandos son positivos

Este caso no tiene complicaciones, pues se reduce a la suma de dos números naturales. Además, físicamente se puede interpretar como suma de desplazamientos, o de suma de fuerzas, hacia la derecha del origen.

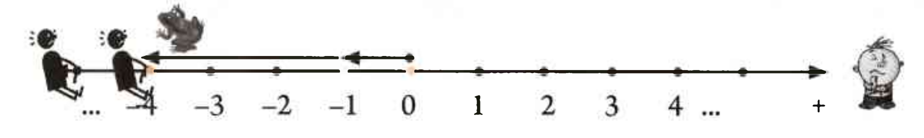
Ejemplo | $(+1) + (+3) = 1+3=4=+4$

– ... −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 ... +

Segundo caso: los sumandos son negativos

Este caso lo analizaremos desde la perspectiva geométrica de las distancias o desplazamientos lineales.

Ejemplo | $(-1)+(-3)= -4 \Leftrightarrow$ Partiendo del origen, recorremos un punto hacia la izquierda, después, a partir de esta nueva posición recorreremos tres puntos más hacia la izquierda, de tal manera, que esta última posición representa la suma de los desplazamientos.



Obsérvese como el resultado en este caso, como en el anterior, se puede obtener sumando los valores absolutos de los sumando y anteponiendo al resultado el signo de dichos sumandos. O sea:

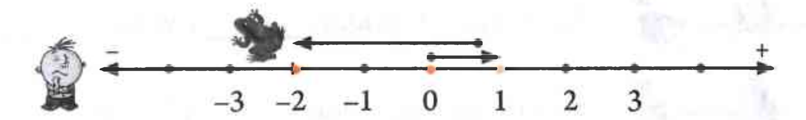
$(+1)+(+3)=+(|+1|+|+3|)=+(1+3)=+4 \quad (-1)+(-3)=-(|-1|+|-3|)=-(1+3)=-4$

Tercer caso: los sumandos son de signo contrario

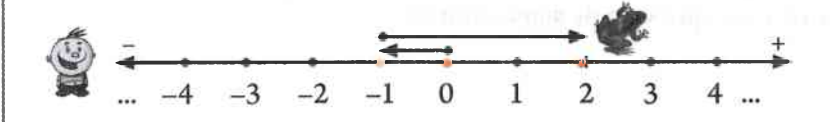
Este caso también se facilita si lo analizamos desde la perspectiva geométrica de los desplazamientos o fuerzas lineales.

Ejemplos

$(+1)+(-3)=-2 \Leftrightarrow$ Partiendo del origen, recorremos un punto hacia la derecha, después, a partir de esta nueva posición recorreremos tres puntos hacia la izquierda, de tal manera, que esta última posición representa la suma de los desplazamientos.



$(-1)+(+3)=+2 \Leftrightarrow$ Partiendo del origen, recorremos un punto hacia la izquierda, después, a partir de esta nueva posición recorreremos tres puntos hacia la derecha, de tal manera, que esta última posición representa la suma de los desplazamientos.



También en este caso se pueden aplicar los valores absolutos de los sumandos de tal manera que el resultado se obtiene anteponiendo el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto a lo que resulta de restar el valor absoluto menor del valor absoluto mayor. O sea:

$(+1)+(-3)=-(|-3|-|+1|)=-(3-1)=-2 \quad (-1)+(+3)=+(|+3|-|-1|)=+(3-1)=+2$

En caso de que se tengan más de dos sumandos, se suman por separados los positivos y negativos, y después se suman los resultados parciales de signo contrario.

Ejemplos

$(+1)+(+3)+(+15)=+(|+1|+|+3|+|+15|)=+(1+3+15)=+19$

$(-1)+(-3)+(-8)=-(|-1|+|-3|+|-8|)=-(1+3+8)=-12$

$(+9)+(-10)+(+3)=+(|+9|+|+3|)+(-10)=(+12)+(-10)=+(|+12|-|-10|)=+2$

$(+1)+(-3)+(+2)+(-5)=[(+1)+(+2)]+[(-3)+(-5)]=(+3)+-8)=-5$

Resta de números enteros

Si un estudiante tiene en su haber $5.00 y gasta $3.00 en el boleto de un camion de transporte urbano, ¿Cuánto le queda de dinero?________________________

Lo anterior se puede representar matematicamente mediante una operación de resta o sustracción entre numeros enteros: $5-3=(+5)-(+3)=$________

Y, geometricamente queda representada como:

$m=(+5)$

$s=(-3)$

– ... –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 ... +

de donde se observa que: $(+5)-(+3)=+2 \Leftrightarrow (+5)+(-3)=+2$

Generalizando lo anterior tendríamos que: para restar dos números enteros lo que se hace es sumarle al minuendo (m) el simétrico del sustraendo (s).

$$m-s=m+(-s)$$

Ejemplos

$(+10)-(+6)=(+10)+(-6)=+4$ $\quad$ $(+10)-(-6)=(+10)+(+6)=+16$

$(-10)-(+6)=(-10)+(-6)=-16$ $\quad$ $(-10)-(-6)=(-10)+(+6)=-4$

$(+3)-(+5)-(-10)=(+3)+(-5)+(+10)=[(+3)+(+10)]+(-5)=(+13)+(-5)=+8$

Otra manera de resolver la resta de enteros es interpretarla desde la perspectiva de la suma tal como se hizo con la resta de naturales. Así, para el ejemplo $(+5)-(+3)=+2$ la solución es la respuesta a la pregunta: ¿Cuál es el número que sumado con $(+3)$ da como resultado $(+5)$?__________

De igual manera para: $(+10)-(+6)=$______ $\Leftrightarrow (+6)+$_____ $=+10$

$(+10)-(-6)=$_____ $\Leftrightarrow (-6)+$_____ $=+10$ $\quad$ $(-10)-(+6)=$_____ $\Leftrightarrow (+6)+$_____ $=(-10)$

$(-10)-(-6)=$_____ $\Leftrightarrow (-6)+$____ $=-10$ $\quad$ $(-20)-(-15)=$_____ $\Leftrightarrow (-15)+$____ $=-20$

Multiplicación de números enteros

Como en el caso de los números naturales, con los enteros también se presentan sumas con sumandos repetidos. Por ejemplo: Si una persona ahorra mensualmente $200.00, ¿cuánto ahorrara en medio año? Como el ahorro es un haber, entonces puede ser representado por (+200), de donde, lo acumulado será:

$(+200)+(+200)+(+200)+(+200)+(+200)+(+200)=\$1200.$

Esta operación, como ya sabes, se abrevia como: $6\times200=(+6)(+200)=+1200.$

Si después de los seis meses de ahorro, esta misma persona deja de ahorrar y empieza a gastar mensualmente $150.00 de su haber, ¿Cuánto habrá gastado después de 4 meses? Y ¿Cuál será su nuevo estado financiero?

Como los gastos mensuales se pueden considerar como deudas que se pagan, entonces se pueden representar por (–120), de tal manera que al cabo de 4 meses la persona habrá gastado $480, lo cual puede ser calculado mediante la siguiente suma repetida de deudas:

$$(-120)+(-120)+(-120)+(-120)=4\times(-120)=(+4)(-120)=-480.$$

En tanto que su nuevo estado financiero viene dado por: (+1200)+(–480)=+720, o sea que tiene un nuevo haber de $720.00.

De las operaciones anteriores entre números enteros, podemos hacer las siguientes generalizaciones. Si $a\in\mathbb{Z}$ y $m\in\mathbb{N}$, entonces:

$$\underbrace{a+a+a+a+\ldots+a}_{m \text{ veces}}=m\times a$$

Ejemplos

$(+6)+(+6)+(+6)+(+6)+(+6)+(+6)+(+6)=(+7)(+6)=+42$

$(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=(+4)(-5)=-20$

$0+0=(+2)(0)=0$; $0+0+0=(+3)(0)=0$; $0+0+0+0+0=(+5)(0)=0$

$(+96538)=(+1)(+96538)=96538$

$(0)(+6)=0$ ¿Por qué?____________________________________

Por otro lado, si una persona se desplaza tres unidades de longitud hacia la derecha, dicho moviento puede ser representado por (+3). Y, si la persona hiciera este movimiento dos veces, entonces su desplazamiento seria de (+6), lo cual puede representarse con la operación (+3)+(+3)=(+2)(+3)=+6. Este resultado es correcto ya que en este caso particular los numeros enteros con que operamos son tambien numeros naturales, y por lo tanto dicho resultado debe ser congruente con sus reglas de operación. Esta operación quedaría representada geometricamente como:

$d=|+3|+|+3|=|+6|=6$

– ... –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 ... +

Ahora, si la persona en lugar de desplazarse hacia la derecha, lo hiciera hacia la izquierda, entonces su posición después del doble desplazamiento sería: (–3)+(–3)=(+2)(–3)=–6. Y, geometricamente quedaría representado como:

$d=|-3|+|-3|=|-6|=6$

– ... –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 ... +

Detengámonos un momento para analizar las dos operaciones de multiplicación anteriores. Tanto en $(+2)(+3)=+6$, como en $(+2)(-3)=-6$, el primer factor $(+2)$ significó el número de desplazamientos en el mismo sentido que hizo la persona, mientras que el segundo factor, $(+3)$ y (-3) respectivamente, significó el sentido y el número de unidades que recorrio la persona por desplazamiento.

Desde esta lógica de interpretación del factor $(+2)$, resulta congruente interpretar el factor (-2) como un operador con efecto contrario al que realiza el $(+2)$. En consecuencia, tendremos que:

$$(-2)(+3)=-6 \quad \text{y} \quad (-2)(-3)=-6$$

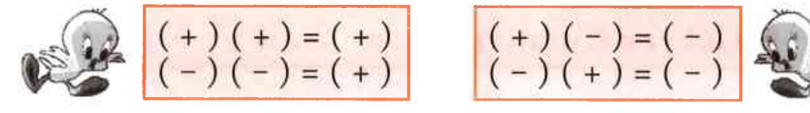
En terminos de haber y deuda, el factor $(+2)$ significaría sumar o multiplicar dos veces el haber $(+3)$ o la deuda (-3) respectivamente. Mientras que el factor opuesto (-2) tendra que significar lo contrario, o sea, restar dos veces el haber $(+3)$ o la deuda (-3). De donde:

$(-2)(+3)=-3-3=(-3)+(-3)=-6$ $\qquad$ $(-2)(-3)=-(-3)-(-3)=+(+3)+(+3)=+6$

Nótese con estos ejemplos como el factor u operador (-2) lo que hace finalmente es sumar o multiplicar dos veces el simétrico del segundo factor $(+3)$ o (-3). Desde este último enfoque de interpretación, cual sería el resultado de:

$(-2)(0)=$____, ¿Por qué?____

De los ejemplos de multiplicación anteriores se puede concluir que: para multiplicar dos números enteros, el producto se obtiene multiplicando los valores absolutos de los factores, anteponiéndole el signo mas $(+)$ si los factores son de igual signo o el signo menos $(-)$ si los factores son de signo contrario. De aquí se establece la famosa **regla de los signos para la multiplicación:**





Si se tienen más de tres factores en la multiplicación, primero se multiplican dos de ellos y el producto parcial resultante se multiplica por otro de los factores, y a si sucesivamente hasta agotar todos los factores.

Ejemplos

$(+2)(+5)(+6)=[(+2)(+5)](+6)=(+10)(+6)=+60$

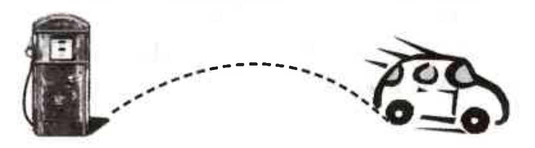
$(+2)(-5)(+6)=[(+2)(+6)]\,(-5)=(+12)\,(-5)=-60$

$(-2)(-5)(-6)=(-2)\,[(-5)(-6)]=(-2)\,(+30)=-60$

$(-4)(+15)(-6)(-12)=[(-4)(+15)]\,[(-6)(-12)]=(-60)\,(+72)=-4320$

División de números enteros

Si un automóvil recorrió por carretera una distancia (d) de 170 Km con 10 litros de gasolina (g), ¿Cuál fue su rendimiento (x) por litro? Respuesta:____________________.



Este problema puede ser resuelto de muchas maneras diferentes, pero una de ellas es haciendo una división entre números enteros de la siguiente manera:

$$x\text{ (rendimiento)} = \frac{+170}{+10} = +17\ km/litro$$

Observa como: $(+10)(+17)=+170$, o sea, que el producto del rendimiento (x) por litro multiplicado por el gasto (g) de combustible es igual al número de kilómetros totales (d) recorridos por el automóvil. De donde, $d=(g)(x)$.

Si en el problema anterior el gasto de gasolina hubiera sido de 12 litros en lugar de 10, ¿Cuál hubiera sido el rendimiento?

$$x\text{ (rendimiento)} = \frac{+170}{+12} = ?\ km/\ litro \qquad \Leftrightarrow \qquad +170 = (+12)(?)$$

¿Qué número entero (?) multiplicado por (+12) da como producto +170? ________

Este ejemplo pone de manifiesto que los números enteros no son cerrados respecto a la operación de división. En otras palabras, no siempre es posible la división entre números enteros.

Cuando la división entre dos números enteros es posible, como en $(+170)\div(+10)=+17$ y $(+170)\div(+17)= +10$, resulta evidente que los divisores de un números entero son a su vez factores de dicho número, pues $(+10)(+17)=+170$, por lo tanto:

Sí a, b y $c \in \mathbb{Z}$, y, $(a)(b)=c\neq0$, $\Leftrightarrow$ $c\div a=b$ y $c\div b= a$.

Ejemplos

$(-2)(-5)= +10$, entonces, -2 y -5 son divisores de $+10$: $\frac{+10}{-2} = -5$ y $\frac{+10}{-5} = -2$

$(+2)(+5)= +10$, entonces, $+2$ y $+5$ son divisores de $+10$: $\frac{+10}{+2} = +5$ y $\frac{+10}{+5} = +2$

$(-2)(+5)= -10$, entonces, -2 y $+5$ son divisores de -10: $\frac{-10}{-2} = +5$ y $\frac{-10}{+5} = -2$

$(+3)(-8)= -24$, entonces, $+3$ y -8 son divisores de -24: $\frac{-24}{+3} = -8$ y $\frac{-24}{-8} = +3$

$(-6)(+4)= -24$, entonces, -6 y $+4$ son divisores de -24: $\frac{-24}{-6} = +4$ y $\frac{-24}{+4} = -6$

De los ejemplos de división anteriores se puede concluir que: para dividir dos números enteros, el cociente se obtiene dividiendo los valores absolutos de los factores, anteponiéndole el signo mas (+) si los números son de igual signo o el signo menos (−) si los números son de signo contrario. De aquí se establece **la regla de los signos para la división:**

$(+) \div (+) = (+)$
$(-) \div (-) = (+)$



$(+) \div (-) = (-)$
$(-) \div (+) = (-)$

Veamos a continuación algunas divisiones especiales entre enteros. Supongamos que las siguientes divisiones se pueden realizar:

$(+5) \div (0) = x$, *entonces, el* 0 *es divisor,* $+5 = (0)(x)$; *pero* $(0)(x) = 0$. ¿Dónde está el error?

$(0) \div (+5) = x$, *entonces,* $0 = (+5)(x)$ ¿Cuándo es esto posible?

$(0) \div (0) = x$, *entonces,* $0 = (0)(x)$ ¿Para qué valores de x es esto posible?

De los ejercicios anteriores podemos concluir que:

✓ Un número entero diferente de cero no es divisible entre cero.
✓ El cero dividido entre cualquier entero diferente de cero da como resultado cero, por tanto cualquier número entero diferente de cero es divisor de cero.
✓ El cero dividido entre cero da un resultado indeterminado, ya que cualquier número entero es un resultado posible. En consecuencia, el cero solo es un divisor de si mismo.

Con las operaciones entre enteros estudiadas y realizadas hasta aquí, se pueden ya plantear, comprender y verificar las siguientes propiedades de sus operaciones básicas. Sean a, b y c números enteros, entonces se cumple que:

P1) Propiedad de cerradura para la suma y la multiplicación:

$$a+b \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

P2) Propiedad conmutativa para la adición y la multiplicación:

$$a + b = b + a \qquad (a \cdot b) = (b \cdot a)$$

P3) Propiedad asociativa para la adición y la multiplicación:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

P4) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

P5) Propiedad del elemento idéntico (o neutro) para la multiplicación:

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

P6) Propiedad del elemento idéntico (o neutro) para la adición:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

P7) Propiedad del elemento inverso (u opuesto) para la adición:

$$a + (-a) = 0$$

Nota: Observa como los números naturales cumplen hasta la propiedad 5.

Potencias de numeros enteros

En el estudio de los numeros naturales aprendiste que: $5^3= 5\times5\times5=$ ☐. De manera similar, en los enteros: $(+5^3)= (+5)(+5)(+5)=+125$ y $(-5^3)=(-5)(-5)(-5)=-125$.

Es importante reconocer la diferencia entre expresiones tales como $(-3)^4$ y -3^4. En -3^4, el paréntesis indica que el exponente se aplica al número -3, pero en -3^4 el exponente solo se aplica al $+3$, se trata pues del número opuesto a 3^4, esto es:

$$(-3)^4 = (-3)\,(-3)\,(-3)\,(-3) = 81 \qquad -3^4 = -(3^4)= -[(3)(3)(3)(3)]=-[81]=-81$$

Al estudiar las potencias para los números naturales se establecieron las siguientes leyes de los exponentes: sí $a, m, n\in \mathbb{Z}$, entonces, $a^na^m=a^{n+m}$ y $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$. Dado que los números naturales son parte de los entero, resulta conveniente extender estas leyes para los exponentes enteros negativos y cero, ya que así tendríamos las mismas leyes de exponentes para ambos conjuntos numéricos. Esta idea nos obliga a preguntarnos por el significado de expresiones tales como: 3^0 y 2^{-2}.

Para encontrar las respuestas a estas cuestiones, analicemos la siguiente operación: $3^0\times3^2=$? Si queremos que valga aquí la ley $a^na^m=a^{n+m}$, entonces, $3^0\times3^2=3^{0+2}=3^2=9$, de donde se concluye, necesariamente, que: $3^0=1$. ¿Por qué?

De igual manera en $8^0\times8^2=8^{0+2}=8^2=64$, se concluye que tambien $8^0=1$. ¿Qué conclusión general obtienes de estas operaciones?_______________________________.

Con este mismo razonamiento analicemos ahora la siguiente operación: $2^{-2}\times2^2=2^{-2+2}=2^0=1$. Este resultado, sin duda alguna, es sorprendente, ya que un número conocido como es $2^2=4$ a sido multiplicado por un número desconocido como es el 2^{-2} y el resultado ha sido la unidad. Esto resultado solo es posible si el factor 2^{-2} es menor que la unidad (¿por qué?). Efectivamente si hacemos que el factor $2^{-2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}= 0.25$, entonces: $2^{-2}\times 2^2= \left(\frac{1}{4}\right)\times4= \left(\frac{1}{2^2}\right)\times4=(0.25)(4)=1$.

Sin embargo, el número $2^{-2}= \frac{1}{4} =\frac{1}{2^2}= 0.25$ obviamente no es un entero, pues se trata de un número fraccionario (o decimal) que pertenece a otro conjunto numérico $\mathbb{Q}$ denominado como racionales, el cual estudiaremos en el siguiente apartado.

Como también las operaciones $5^{-2}\times5^2=5^{-2+2}=5^0=1$, $10^{-3}\times10^3=10^{-3+3}=10^0 =1$ y $(-4)^{-2} \times (-4)^2= (-4)^{-2+2}=(-4)^0=1$ nos conducirian respectivamente a que:

$$5^{-2}=\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 0.04 \qquad 10^{-3}=\frac{1}{1000}=\frac{1}{10^3}=0.001 \qquad (-4)^{-2}=\frac{1}{16}=\frac{1}{(-4)^{-2}}=0.0625$$

entonces, se puede concluir que, todas las potencias de números enteros diferentes de cero con exponente negativo pertenecen al conjunto de los números racionales.

En general:

> Si m y $n\in\mathbb{Z}$, $m\neq0$ y $-n<0$, *entonces*, $m^0=1$ y $m^{-n}=\frac{1}{m^n}$

Ejemplos | $15^{-4}=\frac{1}{15^4}$ $7^{-3}=\frac{1}{7^3}$ $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^{-2}}$ $(-12)^{-1}=\frac{1}{(-12)^1}=\frac{1}{-12}$ $2^{-1}=\frac{1}{2^{-1}}=\frac{1}{2}$

En suma, el uso de exponentes negativos en las potencias con enteros nos conduce a la necesidad de ampliar el conjunto numerico $\mathbb{Z}$ al conjunto numerico $\mathbb{Q}$, el cual incluye a los numeros enteros, los fraccionarios (o quebrados) y algunos con decimales. Resumiendo:

Si a, b, m y n son números enteros, entonces:
- ✓ Definición: *Para* $n>0$: $a^n= a\cdot a\cdot a...a$ (*n veces el factor a*).
- ✓ Definición: *Cuando* $n=1$: $a^1= a$..
- ✓ Definiciones: *Cuando* $a\neq 0$: $a^0=1$ y $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$.
- ✓ Leyes: $a^m\cdot a^n= a^{m+n}$; $(a^m)^n= a^{m\cdot n}$; $(a\cdot b)^m= a^m\cdot b^m$

Actividades de aprendizaje

A1) Descríbele a tus compañero(a)s una situación problemática cuya representación o modelación matemática requiera de los números enteros.

A2) Si en el movimiento lineal de un objeto convenimos en representar con números enteros positivos los desplazamientos hacia la derecha de un punto de origen, y con números enteros negativos los desplazamientos hacia la izquierda de dicho punto de origen, interpreta físicamente las siguientes operaciones entre números enteros:

$(+3)+(+5)=+8$ ____________________

$(-3)+(-5)=-8$ ____________________

$(+5)+(-5)=0$ ____________________

$(+7)+(-5)=+2$ ____________________

$(+5)+(-7)=-2$ ____________________

$(+2)(+3)=+6$ ____________________

$(+2)(-3)=-6$ ____________________

$(-2)(+3)=-6$ ____________________

$(-2)(-3)=+6$ ____________________

A3) Completa los siguientes cuadros que ilustran las leyes de los signos para la multiplicación y división de números enteros:

(+) (+) =	(+) ÷ (+) =
(+) (−) =	(+) ÷ (−) =
(−) (+) =	(−) ÷ (+) =
(−) (−) =	(−) ÷ (−) =

A4) ¿Qué representa geométricamente el valor absoluto de un número entero? ______________

____

A5) Determina los valores enteros de x en las siguientes relaciones:

a) $|x|+10=16$ b) $(5)(|x|)=20$ c) $|x|$ 15=0 d) $|x|>5$

e) $|x|<3$ f) $|x|\geq 2$ g) $|x|\leq 2$ h) $|x+1|<3$

A6) Utiliza operaciones entre números enteros para resolver los siguientes problemas:

a) Calcula la distancia vertical entre un submarino que está a 50 m bajo la superficie del mar y un avión que vuela sobre el a una altura de 2 Km. ______________

b) Un día por la tarde, la temperatura de la ciudad de Culiacán era de 35°C. Por la noche, la temperatura bajo 10°C. ¿Cuál fue la temperatura en la noche? ______________

c) Un delfín nada a 1 m bajo la superficie del mar. ¿Cuánto debe saltar verticalmente para llegar a 2 m sobre la superficie del mar? ______________

d) Arturo tiene $3000.00 en el banco. Deposita un cheque por $1500.00 y retira $700.00 en efectivo. ¿Cuál es su nuevo estado financiero? ______________

A7) Si en el movimiento lineal de un objeto convenimos en representar con números enteros positivos los desplazamientos hacia la derecha de un punto de origen, y con números enteros negativos los desplazamientos hacia la izquierda de dicho punto de origen, interpretar físicamente las siguientes operaciones entre números enteros:

$(+2)+(+4)=+6$ ______________

$(-6)+(-7)=13$ ______________

$(+12)+(-12)=0$ ______________

$(+9)+(-4)=+5$ ______________

$(+60)+(-70)=-20$ ______________

$(+2)(+3)=+6$ ______________

$(+2)(-3)=-6$ ______________

A8) Escribe, en términos de los valores absolutos, las reglas para:

a) sumar dos números enteros positivos: ______________

____

b) sumar dos números enteros negativos: ______________

____

c) sumar dos números enteros de signo contrario: ______________

____

A9) Represente en términos de resta y de suma la siguiente pregunta: ¿Cuál es el número que sumado con (-7) da como resultado $(+8)$?

Como resta: ______________ Como suma: ______________

A10) Realice correctamente las siguientes operaciones de sumas y/o restas entre números enteros:

(+13)+(+15)=______	(−12)+(−7)=______
(21)+(+21)=______	(+18)+(−10)=______
(+12)+(−27)=______	(2)+(+21)=______
(+13)−(+15)=______	(−12)−(−7)=______
(−25)−(+30)=______	(+75)−(39)=______
(−7)−(−7)=______	(+14)−(−68)=______
(+5)+(+ 2)−(+3)=______________	(+6)+(−3)−(+15)=__________________
(−12)−(−7)+(+9)=______________	(−5)−(−2)−(−3)=__________________
(−6)+(+3)−(+15)=______________	(+12)−(+50)−(+9)=________________

(+10)+(−21)−(+36)+(65)+(+82)−(+15)−(12)+(90)−(+ 47)=__________

A11) ¿Cuál es el gasto acumulado de una persona que gasta $4.00 diarios durante 120 días?

____

A12) Si una deuda de $100 que contrae una persona se le triplica cada 12 semanas, ¿cuál será el monto de esa deuda al cabo de año y medio?

A13) Realiza los cálculos correspondientes para verificar la validez de las siguientes igualdades y escribe el nombre de la propiedad de los enteros que la justifica:

23+ (−34)=(−34)+23	Propiedad ______________________
(134)(12)=(12)(134)	Propiedad ______________________
(5+10)+(−6)=5+[10+(−6)]	Propiedad ______________________
[(+2)(−8)](5)=(+2)[(−8)(5)]	Propiedad ______________________
(−7)[4+(−10)]=(−7)(4)+(−7)(10)	Propiedad ______________________
9876+0=9876	Propiedad ______________________
(−27)+(27)= 0	Propiedad ______________________
$(456)^5\ (1)^5=(456)$	Propiedad ______________________

A14) Realice correctamente las siguientes operaciones entre números enteros:

(0)÷(−10)=______	(+12)÷(−2)=______
(−3)[(−2)+(+21)]=______	(+125)÷(+5)=______
(−36204)÷(2586)=_____	(−875)÷(−125)=______
(8)[(+45)−(−39)]=_____	(−12)[(−7)−(−7)]=_____
(−5)(+14)−(−68)=_____	(|+5|)+(−6)(+2)−(+3)=__________
(+6)+(−3)−(+2)(−15)=____________	(2)[(−10)−(−7)+(+6)]=________
(−7)[(−8)−(|−3|)−(−5)]=__________	$(-6)^2\ (-3)^4$=______________

$(-6^3)(-100)(+3)^2=$______________ $[(+10)+(-21)]^2-(+36)^0+(|-65|)=$____________

$(3^3 \times 5^2)^2=$____________ $(24^{-3} \times 24^3)=$_____

$[(+82) \div (-2)]-(-12)^0+(10 \times 10^2)-(+47)^0=$____________

A15) Escribe los nombres de las propiedades que faltan en la siguiente demostración de un binomio al cuadrado: si a y $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Entonces:

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$ Definición de potencia

$=(a+b)\times a+(a+b)\times b$ *Propiedad distributiva*

$=a\times(a+b)+b\times(a+b)$

$=a\times a+(a\times b)+(b\times a)+b\times b$

$=a^2+(a\times b)+(b\times a)+b^2$

$=a^2+(a\times b)+(a\times b)+b^2$

$=a^2+2\times(a\times b)+b^2$

$=a^2+2ab+b^2$

A16) Verifica mediante cálculos aritméticos si para a, b y $c \in \mathbb{Z}$, ¿son verdaderas las siguientes igualdades o desigualdades?

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^3+b^3$
3) $(a+b)(a+c)=a^2+a(b+c)+bc$
4) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; siempre qué: $a>b$.
5) $(a)(b+c)=ab+ac$
6) $(a^2+ab+ac)\div(a)=a+b+c$
7) *Si,* $b>a$, *entonces:* $b^2>a^2$
8) *Si,* $b>a$, *entonces:* $bc>ac$
9) *Si,* $b>a$, *entonces:* $b+c>a+c$

A17) Escribe la definición o propiedad que se usa en cada uno de los pasos de las operaciones siguientes:

$(a+b)(a+c)=(a+b)\times a+(a+b)\times c$____________________

$=a\times(a+b)+c\times=(a+b)$____________________

$=a\times a+a\times b+c\times a+c\times b$____________________

$=a\times a+a\times b+a\times c+b\times c$____________________

$=a^2+a\times b+a\times c+b\times c$____________________

$=a^2+(a\times b+a\times c)+b\times c$____________________

$=a^2+a\times(b+c)+b\times c$____________________

$=a^2+a\times(b+c)+bc$____________________

A18) Encuentra por tanteos, u otro método, los valores de "$x \in \mathbb{Z}$" o "$y \in \mathbb{Z}$" que hacen verdaderas las siguientes relaciones matemáticas:

(a) $y=(397)(654)-298$ (b) $23=(3)(x)+8$ (c) $x-15=30$ (d) $x+y=10$

(e) $x+5>9$ (f) $2y<18$ (g) $x^2+3x-18=0$ (h) $x^2+y^2=100$

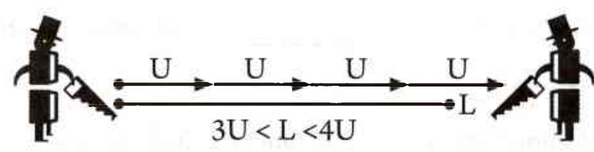
1.5 Números racionales



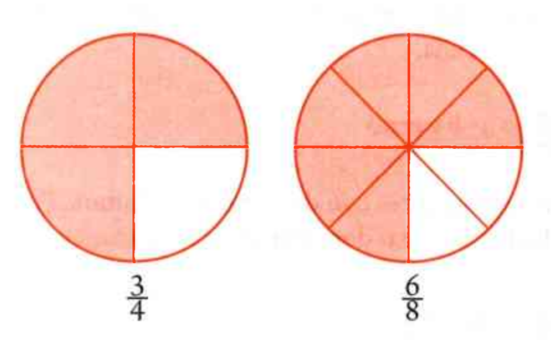
Los números racionales, o fraccionarios, se originan a partir de la necesidad de resolver problemáticas cotidianas, tales como: ¿Si un pastel se reparte en partes iguales entre 8 personas, que porción le toca a cada una de ellas? ________________. Y, ¿entre cuantas personas queda repartida la cuarta parte del pastel?
______________________.

De hecho en la vida cotidiana frecuentemente los utilizamos cuando decimos: medio kilo (1/2 Kg.) de tortillas, tres cuartos de hora (3/4 de hrs.), por cada litro de agua le echas 10 grs. de sal, de 10 tiros ganas con 6 que aciertes, de cada 100 jóvenes en edad de ingresar al bachillerato solamente 20 lo hacen y de estos solo 10 lo terminan, etc.

Otra problemática cotidiana donde los enteros son insuficientes y se necesita de los números racionales, es cuando se tienen que medir algunas magnitudes que no son múltiplo de la unidad de medida **U**. Por ejemplo:



Los números racionales, como ya se analizo en el apartado anterior, también se originan cuando se amplían las leyes de exponentes de los naturales a los enteros. Pero también podemos evidenciar su necesidad al momento de plantear dentro de los enteros ecuaciones del tipo $(x)(+10)=+5$. Esta ecuación no tiene solución dentro de los enteros, pues no existe ningún entero que multiplicado por +10 de cómo resultado +5. Sin embargo, dentro de los racionales existe el número $x=0.5$, tal que, $(0.5)(+10)=+5$.



En general, los números racionales se originan cuando la unidad (que puede ser un pastel, un pedazo de tierra, un segmento de recta, una figura geométrica, etc.), a la cual se le asocia el número 1, se divide en *n* partes iguales.

Por ejemplo, si un segmento de recta cualquiera considerado como unidad se divide en 2, 3 , 4 o 5 partes iguales, obtendremos respectivamente los racionales **1/2, 1/3, 1/4 y un 1/5.**

1/2 1/2
<--------2/2-------->

1/3 1/3 1/3
<----2/3---->

1/4 1/4 1/4 1/4
<---2/4---><---1/2--->

1/5 1/5 1/5 1/5 1/5
<------4/5------>

De la división de estos segmentos, considerados como unidad, se observa que en los racionales o fracciones:

2/3 ➔ el 3 (llamado denominador) indica las partes en que se divide la unidad, mientras que el 2 (llamado numerador) indica el número de partes de la unidad que se están considerando.

4/5 ➔ el 5 (llamado denominador) indica las partes en que se divide la unidad, mientras que el 4 (llamado numerador) indica el número de partes de la unidad que se están considerando.

Generalizando: en el racional **p/q** ➔ **q** (llamado denominador) indica las partes en que se divide la unidad, mientras que **p** (llamado numerador) indica el número de partes de la unidad que se están considerando.

Además, también se observa que existen fracciones, o números racionales en forma de fracción, que aunque son diferentes, tanto en su numerador como denominador, son equivalentes o del mismo valor. Por ejemplo: 2/4=1/2. De hecho se puede demostrar, geométricamente con división de segmentos o algebraicamente, que para una fracción cualquiera existe un número infinito de ***fracciones equivalentes,*** tales como:

2/3=4/6=8/12=... 1/5=3/15=5/25=...

Si en la fracción equivalente $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ multiplicas los números en forma cruzada, o sea, $1\times4=$____ y $2\times2=$____, ¿qué resultados obtienes?__________________. ¿Se cumplirá esto también para las fracciones equivalentes $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ y $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$? __________.

Entonces, una propiedad importante de las fracciones equivalentes es que los productos cruzados de sus números son __________, es decir:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=c\cdot b \quad \therefore \quad \frac{2}{7}=\frac{6}{21} \text{ porque } 2\times21=6\times7$$

Si multiplicas o divides el numerador y denominador de una fracción por un mismo número entero diferente de cero, se obtiene una fracción __________________ a ella.

Ejemplos | $\frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$ $\frac{8}{10}=\frac{8\div2}{10\div2}=\frac{4}{5}$ $\frac{a}{b}=\frac{a\times m}{b\times m}=$; b y $m\neq0$

Con este método se pueden obtener, además, fracciones equivalentes con denominador común. Por ejemplo, se pueden transformar 2/3 y 4/5 a otras equivalentes de igual denominador de la manera siguiente:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15} \quad \text{y} \quad \frac{4}{5}=\frac{4\times3}{5\times3}=\frac{12}{15}$$

observa como el denominador común d resulta de multiplicar los denominadores de ambas fracciones $3\times5=15=d$.

Actividades de aprendizaje

A1) Si un tablero de ajedrez lo consideras como la unidad, ¿con que fracción representarías a un cuadrito del tablero?

A2) ¿Cómo representarías con división de segmentos la fracción 5/3 ?

A3) ¿Qué operación aritmética podrías realizar sobre el numerador y el denominador de 4/10, para obtener una fracción equivalente a ella?

A4) ¿Las fracciones 5/15 y 4/12 son equivalentes?

A5) Para las parejas de fracciones siguientes, obtener una fracción equivalente para cada una de las fracciones del par, de tal manera que las dos tengan igual el denominador:

$\frac{1}{2}=—$ y $\frac{3}{5}=—$ $\qquad$ $\frac{2}{7}=—$ y $\frac{3}{5}=—$ $\qquad$ $\frac{1}{3}=—$ y $\frac{11}{7}=—$

A6) Resuelve las operaciones: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=—$ $\qquad$ $\frac{5}{5}-\frac{4}{5}=—$ $\qquad$ $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=—$

Definición y representación de los racionales

En general, el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) tienen una representación en forma fraccionaria o de decimal, y se pueden definir como:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}/p\in\mathbb{Z}\ ,\ q\in\mathbb{Z}\ \text{ y }\ q\neq 0\right\}$$

Ejemplos de algunos números racionales:

$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{1}{3}=0.333...$	$\frac{-1}{8}=0.125$	$4/5=0.8$	$\frac{125}{111}=1.126126...$
$10/2=5$	$-6/2=-3$	$0/15=0$	$1/1=1$	$30/-5=-6$

De estos ejemplos se observa que la representación decimal de un número racional, considerado como cociente indicado, es ***infinita periódica*** (como en 0.333 ... o 1.126126 ...) o ***finita*** (como en 0.5 o −0.125).

En suma: los números racionales están constituidos por los números enteros (donde están incluidos los naturales), las fracciones no enteras (positivas y negativas) y los números con decimales finitos o infinitos periódicos.

Sabiendo cómo dividir un segmento en parte iguales, los números racionales pueden se localizados en un recta numérica de la siguiente manera.

− −5/3 −0.5 0.25 ½ 4/3 1.66... 6/2 +

... −2 −1 0 +1 +2 +3 ...

Propiedades y relaciones de orden en los números racionales

Los números racionales se pueden comparar entre si para determinar quien es mayor o si son iguales, o sea, son un **conjunto ordenado.** Si a y b son números racionales (a y $b \in \mathbb{Q}$) y a es **menor que** b, denotamos este orden por **la desigualdad**: $a<b$. Esta relación también puede describirse diciendo que b es **mayor que** a y denotándolo por la desigualdad: $b>a$.

Geométricamente el que $\boldsymbol{a<b}$, implica que $\boldsymbol{a}$ se encuentra a la izquierda de $\boldsymbol{b}$ en la recta numérica, como se muestra en la figura de abajo. Y, algebraicamente, $a<b$ implica que $b-a>0$.

Ejemplo | Si $a=-3$ y $b=2$, $b-a=(+2)-(-3)=+5$. Entonces, $b>a$.

a b

El hecho de que los números racionales $\mathbb{Q}$ sea un conjunto ordenado, significa que al igual que los números enteros también cumplen con la **propiedad de tricotomía**, o sea, que se cumple una, y solo una, de las siguientes posibilidades: $a>b$, $a=b$ o $a<b$.

Además de los símbolos de desigualdad > (mayor que) y < (menor que), también se usan frecuentemente símbolos de desigualdad que combinan dos posibilidades, tales como, **la desigualdad** $a \leq b$ que significa que a es **menor o igual que** b, y **la desigualdad** $b \geq a$ que significa que b es **mayor o igual que** a. En estas nuevas relaciones basta con que se cumpla una de las relaciones especificadas, para considerar que la desigualdad se cumple o es verdadera. Por ejemplo, $x=5$ cumple con la desigualdad $x \geq 4$ y $y=-2$ cumple con la desigualdad $y \leq -2$.

Si comparamos un número negativo cualquiera, expresado de cualquier forma, siempre con un número positivo, siempre el número positivo será mayor que el número negativo, pues éste se encontrará a la izquierda del número positivo en la recta real. Ejemplo: de -5 y $+3$, $+3 > -5$.

Como ya se ha señalado anteriormente, a partir de la comparación de dos números racionales por su posición en la recta numérica se puede determinar quien es mayor, sin embargo, existen otros criterios operativos para determinar cuál es mayor.

Por ejemplo, si comparamos dos números negativos cualesquiera, expresados en cualquier forma, será mayor el que tenga menor valor absoluto, pues está más cerca del cero, y en consecuencia se encontrará a la derecha del otro en la recta numérica.

Ejemplo | $-3< -2$, pues, $|-2|=2 <3=|-3|$.

Dados dos números naturales (que también son racionales) expresados en el sistema de numeración decimal, contamos el número de cifras de cada uno, el mayor es el que tiene más cifras. Si tienen el mismo número de cifras, comparamos cifra por cifra de mayor a menor valor posicional, y al encontrar la primera cifra diferente, el mayor será el que tenga la mayor cifra en esa posición. Ejemplo: 1578> 986 y 237<723.

Para determinar cuál es mayor entre dos números decimales, primero comparamos las partes enteras, el mayor será el que tenga la mayor parte entera. Si los números tienen igual su parte entera, se comparan las partes decimales, cifra por cifra, a partir del punto decimal, y al encontrar la primera cifra diferente, el mayor será el que tenga la mayor cifra en esa posición.

Ejemplos

a) $1523.21 > 47.83516$, porque $1523 > 47$

b) $7317.217681 > 7317.215875$

$7317.21\,7\,681 > 7317.21\,5\,875$ porque 7 (milésimas)> 5 (milésimas)

c) $0.6\overline{23} < 0.\overline{623}$

$0.623\,2\,323\ldots < 0.6236\,23623\ldots$ porque 2 (diez milésimas) < 6 (diez milésimas)

Para comparar dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ las transformamos en fracciones equivalentes con el mismo denominador, utilizamos generalmente como denominador común el mcm de b y d, y será mayor la fracción que tenga mayor numerador.

Ejemplo

¿Cuál será mayor $\frac{5}{6}$ o $\frac{7}{8}$?

El mcm de 6 y 8 es 24 ; $\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$; $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$; se tiene que $\frac{20}{24}<\frac{21}{24}$, luego $\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$.

También $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ si, y solo si $ad<bc$; puesto que si se multiplica el numerador y el denominador de la primera fracción por d y el numerador y el denominador de la segunda fracción por b, se obtienen fracciones equivalentes con denominador común bd,

$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}, \frac{c}{d}=\frac{bc}{bd},$ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ si y solo si $\frac{ad}{bd}<\frac{bc}{bd}$ si y solo si $ad<bc$.

De acuerdo con este criterio: $\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$ si y solo si $5\cdot 8<6\cdot 7 \iff 40<42$.

Otra manera de comparar dos fracciones es convertir cada fracción a número decimal, efectuando la división del numerador por el denominador y comparar los números decimales.

Ejemplo

de $\frac{5}{6}=0.8\overline{3}$ y $\frac{7}{8}=0.875$, $0.833\ldots<0.875$, luego $\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$.

Si se tienen dos números, uno expresado como fracción y el otro en forma decimal y se quiere determinar cuál es mayor, se deben representar ambos de la misma forma (ambos como fracción o como decimal) y entonces compararlos. En la práctica lo que más se utiliza es convertir la fracción a decimal.

Ejemplo

¿Cuál es mayor $\frac{9}{11}$ o 0.888? Respuesta: $\frac{9}{11}=0.8\overline{18}=0.81818\ldots<0.888$.

A diferencia del orden en los números enteros, en las fracciones no existe un sucesor ni un antecesor. Entre dos fracciones siempre hay otra fracción, en realidad entre dos fracciones hay infinidad de fracciones. Esto se conoce como ***propiedad de densidad*** de los números racionales. Así, para encontrar una fracción entre dos fracciones dadas se puede proceder como se muestra a continuación.

Ejemplo

a) Sean las fracciones dadas $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$, sabemos que $\frac{2}{5}<\frac{3}{5}$, además podemos ampliar estas fracciones a fracciones equivalentes con denominador 10, para obtener:

$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$ y $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, además, $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, de donde, es inmediato que: $\frac{4}{10}<\frac{5}{10}<\frac{6}{10}$

Por tanto: $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}$.

Este ejercicio se puede resolver también hallando la media aritmética de las dos fracciones (que se obtiene de dividir por 2 la suma de ambas): $\frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}}{2}=\frac{\frac{5}{5}}{2}=\frac{1}{2}$

b) Hallar una fracción entre las fracciones dadas $-\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{7}$. Sabemos que:

$-\frac{3}{7}<-\frac{2}{6}$, y si transformamos estas fracciones a fracciones equivalentes con denominador 42, tendremos: $-\frac{3}{7}=-\frac{18}{42}<-\frac{17}{42}<-\frac{16}{42}<-\frac{15}{42}<-\frac{14}{42}=\frac{2}{6}$.

Cualquiera de las tres fracciones $-\frac{17}{42}$, $-\frac{16}{42}$ y $-\frac{15}{42}$ es solución del problema, y la fracción $-\frac{16}{42}=-\frac{8}{21}$ es precisamente la media aritmética de las fracciones dadas.

Operaciones y propiedades de campo de los números racionales

Todos estamos acostumbrados a operaciones cotidianas del siguiente tipo:

- Medio kilo de fríjol más kilo y medio son ______________.
- Juan se comió la mitad del pastel, y nada más dejo la otra ______ para repartir entre los invitados.
- La mitad de la mitad de una naranja es igual a __________________________.
- De una población de 1000 personas, un cuarto del total son de la tercera edad, y de estos las dos quintas partes son del sexo masculino.

Las que sugieren que los números racionales, como los enteros, se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir.

Suma y resta de números racionales

Como ya estudiaste las operaciones para los racionales de forma entera, a continuación nos concentraremos primeramente en los que tienen forma de fracción. Para facilitar la comprensión de estas operaciones, para el caso de las fracciones, nos apoyáremos en los siguientes segmentos previamente divididos en partes.

En ellos se observa que geométricamente:

1/2 + 1/2 = 2/2 =1 1/3 + 1/3= 2/3 3/3–2/3= 1/3 1+2/3=3/3+3/3=5/3

1/4 +1/4 + 1/4 +1/4 +1/4 = 4/4=1 1/4 +1/4 = 2/4 2/4+1/2=1/2+1/2=2/2=1

4/4 3/4=1/4 1/5+1/5+1/5+1/5=4/5 5/5–4/5=1/5 3/4–1/2=3/4–2/4=1/4

De estos ejemplos, podemos plantear que si las fracciones tienen igual denominador, entonces, cuando $c \neq 0$, en general:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \quad \text{y} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Ejemplo $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7}$ $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{3}{9}$ $2+\frac{3}{5}=\frac{10}{5}+\frac{3}{5}=\frac{10+3}{5}=\frac{13}{5}=2\frac{3}{5}$

Si las fracciones son de diferente denominador, primero se transforman en otras equivalentes con denominador común, y después se suman o restan como en los ejemplos anteriores, de donde, si c y $d \neq 0$, entonces:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a\times d}{c\times d}+\frac{b\times c}{d\times c}=\frac{(a\times d)+(b\times c)}{c\times d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{a\times d}{c\times d}-\frac{b\times c}{d\times c}=\frac{(a\times d)-(b\times c)}{c\times d}$$

Ejemplo $\frac{3}{7}+\frac{1}{5}=\frac{3\times 5}{7\times 5}+\frac{1\times 7}{5\times 7}=\frac{15}{35}+\frac{7}{35}=\frac{15+17}{35}=\frac{32}{35}$; $\frac{1}{8}-\frac{2}{3}=\frac{1\times 3}{8\times 3}-\frac{2\times 8}{3\times 8}=\frac{3}{24}-\frac{16}{24}=\frac{3-16}{24}=\frac{-13}{24}$

Nota: como una fracción también puede considerarse como un cociente o división indicada, entonces, $\frac{-13}{24}=\frac{13}{-24}=-\frac{13}{24}$, ya que como división las tres dan el mismo resultado. En general: $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$.

Como en estos ejemplos las fracciones se están representando con segmentos y estos pueden considerarse como dirigidos ya sea en sentido positivo o negativo, resulta que estas reglas para sumar o restar son validas si las fracciones son positivas o negativas.

Ejemplo $\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(+\frac{3\times 5}{4\times 5}\right)+\left(-\frac{2\times 4}{5\times 4}\right)=\left(+\frac{15}{20}\right)+\left(-\frac{8}{20}\right)=\left(\frac{+15}{20}\right)+\left(\frac{-8}{20}\right)=\frac{(+15)+(-8)}{20}=\frac{7}{20}$

Cuando se suman o restan dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, en aras de obtener un resultado más simplificado o simple posible es frecuente que se transformen en fracciones equivalentes con el mismo denominador, utilizando como denominador común el mcm de los denominadores.

Ejemplo Para sumar las fracciones $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$, el mcm de los denominadores 6 y 8 es 24.
Por tanto: $\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$ y $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$; de donde se tiene que: $\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{20}{24}+\frac{21}{24}=\frac{41}{24}$.

También se pueden presentar casos donde se combinen la suma y la resta como en el siguiente ejemplo donde se usa el mcm como denominador común:

$$\frac{1}{6}-\frac{5}{4}+3=\frac{1}{6}-\frac{5}{4}+\frac{12}{4}=\frac{1\times 2}{6\times 2}-\frac{5\times 3}{4\times 3}+\frac{12\times 3}{4\times 3}=\frac{2}{12}-\frac{15}{12}+\frac{36}{12}=\frac{2-15+36}{12}=\frac{23}{12}$$

Multiplicación y división de números racionales

Consideremos de nueva cuenta la interpretación geométrica de las fracciones para comprender el proceso y el algoritmo de la multiplicación. Observemos pues la siguiente figura dividida horizontalmente en tercios y verticalmente en quintos:

1/3	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15
1/3	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15
1/3	1/15	1/15	1/15	1/15	1/15
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

En esta figura se puede observar que:

Un tercio de un quinto es igual a: $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}=\frac{1\times1}{3\times5}$

Dos tercios de tres quintos es igual a: $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{6}{15}=\frac{2\times3}{3\times5}$

Dos tercios de cuatro quintos es igual a: $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{15}=\frac{2\times4}{3\times5}$

A partir de estos resultados se puede fomular el algoritmo general de la multiplicación de fracciones:

$$\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{d}\right)=\frac{a\times b}{c\times d}$$

Ejemplo

$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{5\times1}{3\times7}=\frac{5}{21}$

$\left(\frac{-4}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{(-4)(2)}{3\times9}=\frac{-8}{27}$

$(-3)\left(\frac{12}{-5}\right)=\left(\frac{-3}{1}\right)\left(\frac{12}{-5}\right)=\frac{-36}{-5}=\frac{36}{5}$

$\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{5\times3}{3\times5}=\frac{15}{15}=1$

$\left(\frac{-2}{7}\right)\left(\frac{7}{-2}\right)=\frac{(-2)(7)}{(7)(-2)}=\frac{-14}{-14}=1$

$(6)\left(\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6\times1}{1\times6}=\frac{6}{6}=1$

Notese como en los tres últimos ejercicios el resultado es 1. Cuando sucede esto a las fracciones que se multiplican se les llaman **fracciones reciprocas**, y se dice que una cualquiera de ellas es la reciproca de la otra. Así 8/9 y 9/8 son fracciones reciprocas, pues (8/9)(9/8)=1.

Para comprender la división de fracciones observese la siguiente figura considerada como unidad:

La unidad (el uno: 1) dividido en cuartos es igual a 4 partes:

¼	¼
¼	¼

$$(1)\div\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}\right)\div\left(\frac{1}{4}\right)=4=\frac{4\times4}{4\times1}=\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$

Un medio dividido en cuartos es igual a 2 partes:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{1}{4}\right)=2=\frac{1\times4}{2\times1}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$



Con este par de ejemplos podemos observar que para dividir dos fracciones, el resultado se puede obtener considerandolas como una división indicada de dos numeros donde el numerador se multiplica por la fracción reciproca del denominador. O sea:

$$\left(\frac{a}{c}\right)\div\left(\frac{b}{d}\right)=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{d}{b}\right)=\frac{a\times d}{c\times b}$$

La consideración de la división de fracciones desde la perspectiva del cociente indicado permite tambien deducir el proceso de la división de fracciones de la siguiente manera:

$$\left(\frac{a}{c}\right)\div\left(\frac{b}{d}\right)=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{d}{b}\right)}{\left(\frac{b}{d}\right)\left(\frac{d}{b}\right)}=\frac{a\times d}{c\times b}=\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{d}{b}\right)$$

Ejemplo

$$\left(\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{2}{7}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{4\times 7}{3\times 2}=\frac{28}{6}$$

$$(-3)\div\left(\frac{12}{-5}\right)=\left(\frac{-3}{1}\right)\left(\frac{-5}{12}\right)=\frac{(-3)(-5)}{(1)(12)}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{8}{3}\right)\div\left(\frac{6}{10}\right)=\frac{8\times 10}{3\times 6}=\frac{80}{18}=\frac{40}{9}\quad \text{(Regla del Dragon)}$$

$$\left(\frac{-4}{3}\right)\div\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{-4}{3}\right)\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{(-4)(9)}{3\times 5}=\frac{-36}{25}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{2}}=\frac{(3)(2)}{(4)(7)}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}\quad (RT)$$

Con las operaciones entre números racionales realizadas hasta aquí estamos ya en condiciones de plantear, comprender y verificar las **propiedades de campo** de sus operaciones básicas (como son la suma y la multiplicación). **Sean *a*, *b* y *c* números racionales, entonces se cumple que:**

P1) Propiedad de cerradura para la suma y la multiplicación:

$$a+b\in\mathbb{Q} \quad \text{y} \quad a\cdot b\in\mathbb{Q}$$

P2) Propiedad conmutativa para la adición y la multiplicación:

$$a+b=b+a \qquad (a\cdot b)=(b\cdot a)$$

P3) Propiedad asociativa para la adición y la multiplicación:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

P4) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

P5) Propiedad del elemento idéntico (o neutro) para la multiplicación:

$$a\times 1=1\times a=a$$

P6) Propiedad del elemento idéntico (o neutro) para la adición:

$$a+0=0+a=a$$

P7) Propiedad del elemento inverso (u opuesto) para la adición:

$$a+(-a)=0$$

P8) Propiedad del elemento inverso (u opuesto) para la multiplicación:

$$a\cdot\frac{1}{a}=1,\ a\neq 0$$

Nota: Oberva que los numeros naturales cumplen hasta la propiedad 5, mientras que los numeros enteros cumplen hasta la propiedad 7, y finalmente los numeros racionales cumplen con las 8 propiedades.

A continuación verificaremos con ejemplos particulares algunas propiedades para la suma y la multiplicación de fracciones.

Propiedad asociativa de la suma: en una suma de una terna de números racionales, la forma como se agrupan los sumandos no altera el resultado de la suma.

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{(-3)}{8}\right)+\frac{7}{12}=\left(\frac{40+(-9)}{24}\right)+\frac{7}{12}=\frac{31}{24}+\frac{7}{12}=\frac{31+14}{24}=\frac{45}{24}$$

$$\frac{5}{3}+\left(\frac{(-3)}{8}+\frac{7}{12}\right)=\frac{5}{3}+\left(\frac{(-9)+14}{24}\right)=\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{24}\right)=\frac{40+5}{24}=\frac{45}{24}$$

Por tanto, en general: $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$

Propiedad distributiva: al multiplicar un número racional por el resultado de una suma indicada, se obtiene el mismo resultado que si multiplicamos este número por cada sumando y después se suman los productos parciales.

Ejemplo

$$\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{-2}{5}+\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{-6+25}{15}\right)=\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{19}{15}\right)=\frac{57}{105}=\frac{19}{35}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{-6}{35}+\frac{15}{21}=\frac{-126+525}{735}=\frac{399}{735}=\frac{19}{15}$$

$$\therefore\ \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{-2}{5}+\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$$



En general: $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)$

Potencias de racionales con exponentes enteros

El concepto de potencia en los racionales es el mismo que en los enteros. En los números enteros se estableció que la potencia de un entero "*a*" elevado al exponente natural "*n*", es decir a^n, se obtiene multiplicando la base "*a*" por si misma tantas veces como lo indica el exponente "*n*", es decir:

$$a^n = a{\cdot}a{\cdot}a\ldots{\cdot}a \quad (n \text{ veces el factor } a)$$

Ejemplo | $2^4=2\times2\times2\times2=16$

En general, si a y b son racionales, y n es número entero, entonces se definen:

Para $n>0$: $a^n= a{\cdot}a{\cdot}a\ldots a$ *(n veces el factor a)* *Para* $n=1$: $a^1=a$

Para $a \neq 0$ y $n=0$: $a^0=1$ Para $a \neq 0$ y $-n<0$: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Así pues, una potencia de fracciones es una multiplicación de factores fraccionarios iguales.

Ejemplo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}=\frac{81}{625}=\frac{3^4}{5^4}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^4=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^8=\frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5}=\frac{2^8}{3^8}=\frac{256}{6561}$$

Multiplicación de potencias de igual base:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5=\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^8=\left(\frac{5}{6}\right)^{3+5}$$

En general: $\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$

Potencia de un producto: $\left[\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\right]^3=\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{7}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3$

En general: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{c}{d}\right)^n$

División de potencias de igual base:

$$\left(\frac{7}{9}\right)^5\div\left(\frac{7}{9}\right)^3=\left(\frac{7^5}{9^5}\right)\div\left(\frac{7^3}{9^3}\right)=\left(\frac{7^5}{9^5}\right)\left(\frac{9^3}{7^3}\right)=\frac{7^5\times9^3}{9^5\times7^3}=\frac{7^5\times7^{-3}}{9^5\times9^{-3}}=\frac{7^{5-3}}{9^{5-3}}=\left(\frac{7}{9}\right)^{5-3}=\left(\frac{7}{9}\right)^2$$

En general: $\left(\frac{a}{b}\right)^n\div\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}\Rightarrow\left(\frac{a}{1}\right)^n\div\left(\frac{a}{1}\right)^m=\left(\frac{a}{1}\right)^{n-m}=(a)^{n-m}\Rightarrow\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

Potencia de una potencia:

$$\left[\left(\frac{5}{9}\right)^2\right]^3=\left(\frac{5}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^2=\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}\right)^6=\left(\frac{5}{9}\right)^{2\times3}$$

En general: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$

En suma, las potencias de numeros racionales a y b, y en particular de las fracciones, con exponentes enteros m y n cumplen las siguientes leyes de exponentes:

- ✓ $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$; $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$
- ✓ *Cuando* $b\neq0$: $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$; *Cuando* $a\neq0$: $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.



Actividades de aprendizaje

A1) Escribe en orden creciente (de menor a mayor) los siguientes números:

a) $\frac{6}{7}$; 0.95 ; $1\frac{1}{4}$; 2 ; 1.333 ; $\frac{9}{7}$; 1 ; $\frac{8}{9}$; 1.275 ; 0.75

b) $-\frac{15}{8}$; -3 ; -1.90 ; -2.44 ; $-\frac{7}{3}$; $-\frac{11}{4}$; -2.85 ; -1.55 ; $-2\frac{1}{2}$; -2

A2) Determina para cada fracción los dos enteros más próximos: a) $\frac{7}{5}$ b) $-\frac{22}{7}$

A3) Encontrar una fracción entre: a) $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$ b) $-\frac{2}{6}$ y $-\frac{2}{5}$ c) $\frac{6}{4}$ y $\frac{21}{9}$

A4) Simplificar las siguientes fracciones:

$\frac{3}{27}=-$ $\frac{-12}{48}=-$ $\frac{25}{145}=-$ $\frac{30}{-1200}=-$

A5) Realizar las siguientes operaciones indicadas:

$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}-\frac{14}{3}=$ — $\frac{6}{5}-\frac{7}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=$ — $4-\frac{1}{8}+\frac{4}{5}=$ — $\left(0.5+\frac{1}{2}\right)^{10}=$

$4-0.3\overline{3}=$ $10-0.125+\frac{2}{5}-0.6\overline{6}=$ $\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^4=$ — $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^4=$

$\left[\left(\frac{6}{7}\right)^8\left(\frac{6}{7}\right)^{-8}\right]^{100}=$ $\left(\frac{-2}{7}\right)\left(\frac{5}{-4}\right)=$ — $\left(\frac{9}{12}\right)\left(\frac{-8}{15}\right)=$ — $\left(\frac{2}{7}\right)\left[\left(\frac{9}{12}\right)\div\left(\frac{-8}{15}\right)\right]=$ —

$\left(\frac{3}{5}\right)^8\div\left(\frac{3}{5}\right)^6=$ — $\left(\frac{3}{5}\right)^2\div\left(\frac{1}{4}\right)^3=$ — $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\div\left(\frac{4}{7}-\frac{7}{4}\right)=$ —

$\left(\frac{6}{9}+\frac{5}{4}\right)\div\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{7}\right)=$ — $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+3}{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}-1}=$ —

A6) Verifique la propiedad asociativa en la multiplicación de las siguientes fracciones:

$\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)\left(\frac{6}{8}\right)\right]=$ — $\left(\frac{5}{4}\right)\left[\left(\frac{-3}{10}\right)\left(\frac{6}{8}\right)\right]=$ —

Razones, porcentajes y proporciones

Los números racionales en forma de fracción tiene varios significados, los más usados son: operador en una relación, operador parte-todo, división o cociente indicado, escala, pendiente, porcentaje, probabilidad, tasa de variación, operador inverso multiplicativo, etc.

La fracción a/b como ***razón*** representa una relación entre dos cantidades. Por ejemplo: 4/10 puede interpretarse como cuatro de cada 10 personas adultas practican algún deporte regularmente. Así pues, a la relación que existe entre dos cantidades se le conoce como razón. Las razones se pueden representar por dos puntos o un cociente indicado.

Y generalmente representa el número de veces que una cantidad está contenida en otra. Por ejemplo, si un automóvil se desplaza a 80 km/h y una bicicleta a 20 km/h, se dice que la razón entre estas velocidades es de 4 a 1, porque la velocidad del automóvil contiene cuatro veces la de la bicicleta, o también porque la velocidad del automóvil es 4 veces más grande que la de la bicicleta.

La razón se puede plantear de la siguiente manera: 80 km/h del auto es a 20 km/h de la bicicleta. Esto se representa como 80:20, o bien como 80/20. Esta relación también podría haber sido 40/10, 20/5 o 4/1, ya que todas estas fracciones son equivalentes.

La razón $1/n$ (o $1{:}\ n$) como ***escala***, significa que las magnitudes reales de una figura son n veces más grandes que las que miden en el dibujo. Por ejemplo, si la longitud de una carretera o camino dibujado en un mapa es 8 cm, y la escala del mapa es de 1 cm : 100 km, entonces la longitud real (L) de la carretera es de: $L=8\times100=800$ km.

Una fracción también puede interpretarse como ***porcentaje***, así cuando se habla de que una solución química tiene un 25% de alcohol, se esta estableciendo una relación parte-todo donde de cada 100 partes del total 25 partes son de alcohol, y queda representada como 25/100. De esta manera, el 50% y el 15% de \$700.00 son respectivamente:

$$(50)(700/100)=(50/100)(700)=(0.50)(700)=\$350.00$$

$$(15)(700/100)=(15/100)(700)=(0.15)(700)=\$105.00$$

Ahora, sí sabemos que cuatro de cada 10 personas adultas practican algún deporte regularmente de una población total de 3500 personas: (a) ¿Qué porcentaje lo práctica? y (b) ¿Cuántas personas de esta población practican regularmente deporte?

Soluciones: (a) $(4)/(10/100)=\left(\frac{4}{1}\right)\div\left(\frac{10}{100}\right)=\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{10}{100}\right)=\frac{4\times100}{10}=\frac{400}{10}=40\%$

Otro método: $\left(\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{4\times10}{10}\right)=\left(\frac{40}{100}\right)\quad\therefore\quad el\ 40\%$

(b) $\left(\frac{40}{100}\right)(3500)=\left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{3500}{1}\right)=\frac{40\times3500}{100\times1}=\frac{140000}{100}=1400\ personas$

Unos de los campos donde los porcentajes tienen una amplia aplicación es en el comercio, las finanzas y la economía. Por ejemplo es muy común ir de compras a un supermercado y leer que determinado producto, con un precio etiquetado de \$300.00, tiene un descuento del 30%.

¿Cuánto se tendría que pagar por el producto anterior si el precio etiquetado fuese sin el descuento? Y ¿Cuál seria el precio inicial del producto si el precio etiquetado fuese ya con el descuento?

Si el precio etiquetado es sin el descuento, el costo del producto sería:

$$\$[300.00 - (300)(.30)] = \$[300 - 90] = \$210.00$$

El resultado anterior también se puede calcular en forma directa, pues como el descuento es del 30% entonces el costo será del 70%: (\$300.00)(0.70)=\$ 210.00.

Ahora, si el precio etiquetado ya tiene descuento, entonces su precio original (PO) es: como (PO)(0.70)=\$300.00 , entonces, PO=\$300.00 / 0.70= \$428.57

Otra aplicación cotidiana de los porcentajes se presenta cuando una persona deposita un capital en un banco durante un cierto tiempo y el banco le paga intereses. Dependiendo de que se retiren o no los intereses periódicamente, el interés se llama simple o compuesto.

¿En cuánto se convierte un capital de \$10,000.00 al 15 % en dos años a interés simple? ¿Y a interés compuesto?

El capital a interés simple: en el primer año el interés es \$ $(10{,}000.00 \times 0.15)$= \$1500.00. Al final del primer año se retiran los intereses y el capital sigue siendo el mismo: \$10,000.00. En el segundo año, el capital vuelve a producir otros \$1500.00. Por tanto, al final de los dos años el capital inicial más lo intereses dan un total de: \$(10,000+1500+1500)=\$13,000.00.

Se puede obtener directamente el ***interés simple*** (i) en los dos años: i=(10, 000)(0.15)(2)=3000. Y en general, si C_i es el capital inicial, r es la tasa de interés anual y t es el tiempo transcurrido en años, entonces: $i = \dfrac{C_i \times r \times t}{100}$.

Además, el capital final (C_f) obtenido después de tener un capital inicial (C_i) durante un cierto número de años (t) a una tasa de interés anual (r) viene dado por la fórmula:

$$C_f = C_i + i = C_i + \left(\frac{C_i \times r \times t}{100}\right) = C_i \cdot \left(1 + \frac{r \times t}{100}\right)$$

El capital acumulado a interés compuesto en el primer año es:

$$C_1 = \$10{,}000.00 + \$(10{,}000.00)(0.15) = \$10{,}000.00\,(1+0.15) = \$11{,}500.00$$

Como los intereses ganados el primer año no se retiran, entonces el nuevo capital inicial es de \$11,500.00 y ***el capital acumulado a interés compuesto en el segundo año es:***

$$C_2 = \$11{,}500.00 + \$(11{,}500.00)(0.15) = \$11{,}500.00\,(1+0.15) = \$13{,}225.00$$

Aunque el problema ya esta resuelto, para efecto de poder observar alguna regularidad en el resultado, que permita inferir una formula general, lo reescribimos de la siguiente manera:

$$C_2 = \$11{,}500.00\,(1+0.15) = (\$10{,}000.00)(1+0.15)(1+0.15)$$
$$= (\$10{,}000.00)(1+0.15)^2 = \$13{,}225.00$$

Observando los resultados finales para C_1 y C_2, ¿Cuál crees sería el capital final acumulado (C_f) durante tres y cuatro años? Y ¿Cuál para t años?

En general, el capital final (C_f) que se obtiene a partir de un capital inicial (C_i) en *t* años, al tanto por ciento anual *r* con interés compuesto es: $C_f = C_i\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

Proporcionalidad y variación directamente e inversamente proporcional

Cuando una fracción o razón es igual a otra, se dice que las fracciones son proporcionales o que existe proporcionalidad entre ellas. Es decir, para tener una relación proporcional, se necesita tener dos fracciones o razones que sean equivalentes.

Ejemplo | proporciones o relaciones de proporcionalidad:

$\frac{80}{80}=\frac{20}{5}$ $\quad \frac{4}{3}=\frac{12}{9}$ $\quad 2:10:1:5$ $\quad 6:x:3:2$ $\quad \frac{5}{10}=\frac{x}{36}$

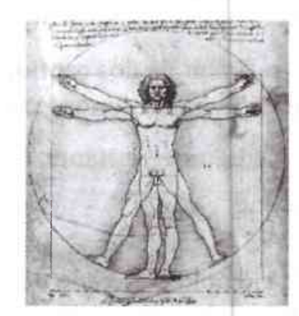
¿En las proporciones $6:x:3:2$ y $\frac{5}{12}=\frac{x}{36}$, cuál es el valor de x?

Las proporciones tienen algunas propiedades aritméticas interesantes, tales como:

- ✓ El producto de sus extremos es igual al producto de sus medios: $\frac{5}{3}=\frac{10}{6} \Leftrightarrow (5)(6)=(3)(10)$
- ✓ Sus términos se pueden invertir o intercambiar:

$$\frac{5}{3}=\frac{10}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{5}=\frac{6}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{10}=\frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{3}=\frac{10}{5}$$

- ✓ Si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ y $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$



Ejemplo | $\frac{5}{3}=\frac{10}{6} \Rightarrow \frac{5+3}{3}=\frac{10+6}{6}$ y $\frac{5-3}{3}=\frac{10-6}{6}$

Las proporciones tienen una amplia aplicación en la vida cotidiana, en la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, las aplicaras extensamente en el estudio de la semejanza de triángulos y de la trigonometría en el curso de matemáticas III de segundo año. En particular, a continuación estudiaremos dos tipos de proporcionalidad, la directa y la inversa, las cuales sirven para resolver problemas donde se conoce una razón y un dato de la segunda, como en los ejemplos: $6:x:3:2$ y $\frac{5}{12}=\frac{x}{36}$.

Proporcionalidad directa: Si en una razón al aumentar una cantidad, la otra también aumenta, se dice que la proporcionalidad es directa. Ejemplo: dos albañiles construyen 30 m^2 de barda al día y cuatro albañiles construyen 60 m^2 de barda al día.

Esto se puede escribir de varias maneras:

- ✓ Con dos puntos
  30m^2: 2 albañiles : 60m^2: 4 albañiles (se lee: "30 es a 2 como 60 es a 4")
- ✓ Con numerador y denominador o división indicada: 30/2

✓ Como tabla:

No. de albañiles	2	4	6	8
m^2 de barda construida	30	60	90	120

Si en esta tabla continuamos anotando una mayor cantidad de albañiles y la cantidad de barda que construyen, se observa que las razones van creciendo proporcionalmente. Se puede ver que existe una relación proporcional directa: 2 albañiles construyen 60 m^2, 6 albañiles construyen 90 m^2. Esto se puede escribir de la siguiente manera: 30/2=90/6 o 60/4=120/8. Al haber más albañiles, se construyen más metros cuadrados. ¿Cuántos albañiles se ocupan para construir 105m^2?______.

Un problema cotidiano de este tipo se presenta cuando una persona desea saber que cantidad de pistaches le deben despachar por $50.00, si un kilo de pistaches cuesta $140.00. En este caso, como ya se conoce una razón: por 140 pesos se recibe 1000 gramos (o sea un kilo). Y de la segunda razón solamente se conoce un dato: que se quiere comprar 50 pesos. Esto se puede representar simbólicamente así:

$$\frac{140}{1000}=\frac{50}{x} \Rightarrow \quad (140)(x)=(50)(1000) \quad \Rightarrow \quad x=\frac{(50)(1000)}{140}=357.142857\ \textit{gramos}$$

O en forma equivalente, pero más práctica y directa:

$$\frac{x}{50}=\frac{1000}{140} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{50}=7.142857143 \quad \Rightarrow \quad x=(50)(7.142857143)=357.142857\ \textit{gramos}$$

Para fines prácticos: ¿se puede decir que, en este caso, la solución es de 357 gramos? Discute tu respuesta con tus compañero(a)s de clase.

La relación de dos cantidades directamente proporcionales entre si también se puede analizar de la siguiente manera: supongamos que y es directamente proporcional a x, entonces su razón o cociente indicado es una constante, o sea, $\frac{y}{x}=k$, pues se debe cumplir que $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=k$, de donde, puede plantearse que: $y=kx$.

Un ejemplo cotidiano de una relación proporcional directa de este tipo es la fórmula para calcular la distancia (y) recorrida en un cierto tiempo (x) por un automóvil que se desplaza a la velocidad constante de k=90 k/hr. Así, en un tiempo de 2 horas (x=2), este automóvil recorrerá una distancia: $y=kx=(90\ k/hr)(2\ hr)=180\ km$.

Proporcionalidad inversa: Cuando en una razón una cantidad aumenta y la otra disminuye se habla de proporcionalidad inversa. Ejemplo: un pintor puede resanar y pintar 300 m^2 en 8 días, pero dos pintores harán el mismo trabajo en 4 días. Mientras más pintores haya, menos tiempo tardan en hacer este trabajo. Esto se puede escribir de varias maneras:

✓ Con dos puntos: 1:8 : 2:4 (se lee "uno es a ocho como dos es a cuatro")

✓ Como fracciones proporcionales o división señalada: $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$

✓ Como tabla:

Número de pintores	1	2
Tiempo necesario en días de trabajo	8	4

Un problema práctico de proporcionalidad inversa es el siguiente: Si cuatro personas tardan ocho días en aplanar un terreno, ¿cuántas personas (x) se necesitan para hacerlo en dos días?

Recordar que en la proporción inversa se espera que, al aumentar un número, disminuya el otro: es decir, con más trabajadores se realiza en menor tiempo el mismo trabajo. Como los días disminuyen en $1/4(=2/8)$, entonces el número de trabajadores debe aumentar por un factor de $4(=8/2)$, por tanto, se necesitan: $x=(4)(4)=(8/2)(4)=\frac{8\times4}{2}=16$ personas. En forma de proporción: $\frac{4}{2}=\frac{x}{8}\Rightarrow(x)=\frac{4\times8}{2}=16$.

También, la relación de dos cantidades inversamente proporcionales entre si se puede analizar de la siguiente manera: supongamos que y es inversamente proporcional a x, esto significa que al aumentar y la x disminuye y viceversa, pero esto solamente es posible si $y=\frac{k}{x}$, o su **producto indicado** es constante (una constante), lo cual implica que: $y_1\cdot x_1=k=y_2\cdot x_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$.

Un ejemplo físico de una relación inversamente proporcional es la que existe entre el volumen de un gas $(y=v)$ que se encuentra a una cierta presión dentro de un pistón móvil a temperatura constante $(x=p)$: al aumentar la presión el volumen disminuye y viceversa. Así, si a temperatura constante cierta cantidad de un gas ocupa un volumen de 90 cm^3 bajo una presión de 450 milímetros de mercurio, ¿qué volumen ocuparía el mismo gas bajo una presión de 600 milímetros de mercurio?

Solución: $\frac{y_1(=v_1)}{y_2(=v_2)}=\frac{x_2(=p_2)}{x_2(=p_1)}\Rightarrow v_2=\frac{v_1p_1}{p_2}=\frac{(90)(450)}{(600)}=$ __________.

Actividades de aprendizaje

A1) Dos personas tienen que repartirse una paga de $40,000.00 por un trabajo que realizaron conjuntamente durante 18 días, pero, uno de ellos trabajo únicamente 10 días y el otro 8 días. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

A2) Una llave de agua puede llenar un tinaco en 2 horas, mientras que otra puede llenarlo en 5 horas. ¿En cuanto tiempo llenaran el tinaco las dos llaves funcionando juntas?

A3) En un supermercado un producto tiene un descuento del 30% del precio etiquetado que es de $258.00, ¿cuál es el precio del producto ya con el descuento?

A4) Una persona dispone de $1000.00 para comprar sus útiles escolares. Si realiza una compra por $380.00, ¿qué porcentaje gasto y que porcentaje le queda para otras compras?

A5) Una solución tiene un 45% de agua. ¿Cuántos cm^3 de agua tendrán 80 cm^3 de esta solución?

A6) ¿En cuánto se convierte un capital de $50,000.00 invertido durante tres años en un banco que paga el 15 % anual a interés simple? ¿Y a interés compuesto?

A7) Hallar el capital que es necesario depositar, sin retirar los intereses, en una cuenta bancaria que paga el 20% con capitalización anual, si se quiere disponer de $80,000.00 al cabo de 5 años.

A8) El corazón de un hombre adulto, en condiciones normales, bombea 5 litros de sangre por minuto. ¿Cuántos litros de sangre bombeará en un día y en una semana?

A9) Un automóvil que se desplaza a velocidad constante recorre 70 km. en 50 minutos. ¿Cuantos kilómetros recorrerá en 1.5 horas?

A10) Cuatro llaves de igual capacidad funcionando juntas llenan un depósito de agua en 12 horas. ¿En cuánto tiempo llenaran el depósito 6 llaves del mismo tipo?

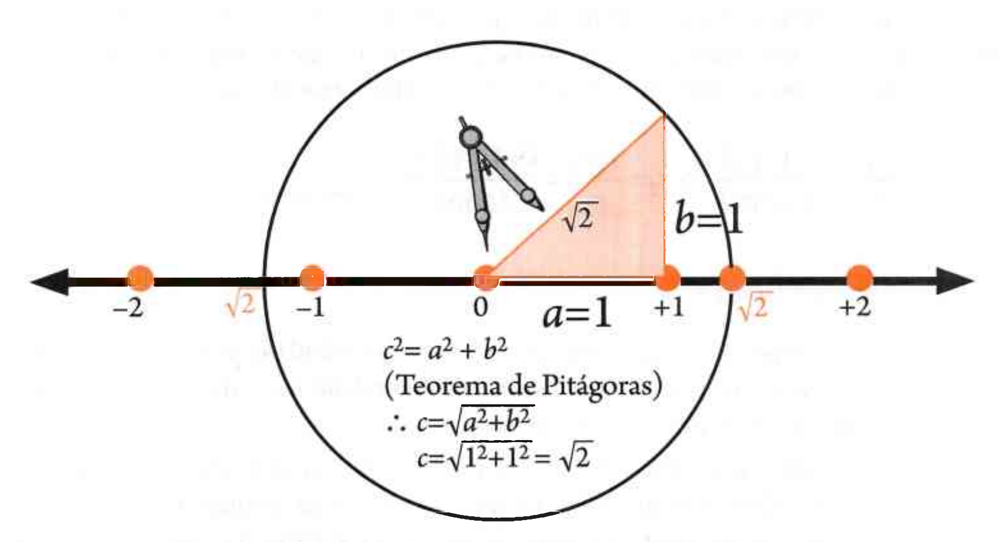
A11) Cierta cantidad de gas, a temperatura constante, ocupa un volumen de 60 a una presión de 520 milímetros de mercurio. ¿Qué volumen ocupa el gas a una presión de 800 mm de Hg?

1.6 Números irracionales: Definición y representaciones

Si calculas el valor de $\sqrt{2}$ en una calculadora con pantalla para 10 dígitos obtendrás que $\sqrt{2}$=__________. Sin embargo, si usaras una calculadora con mayor capacidad de pantalla, digamos 16 dígitos, entonces el valor que obtendrías sería de $\sqrt{2}$=1.414213562373095. Si esto te sorprende, mira a continuación el valor de $\sqrt{2}$ con aproximación de 100 dígitos en su parte decimal.

$\sqrt{2}$= 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415 73...

Aunque $\sqrt{2}$ tenga representación decimal infinita no periódica esto no implica que no se pueda localizar en la recta numérica. En la figura siguiente se muestra un procedimiento geométrico para localizar la $\sqrt{2}$ y su simétrico en la recta numérica.



Recuerdas que al estudiar los números racionales se estableció que la representación decimal de ellos es ***infinita periódica*** (como en 0.333... o 1.126126...) o ***finita*** (como en 0.5 o −0.125). Sin embargo, como ya se vio en el caso de $\sqrt{2}$ su representación decimal es ***infinita no periódica***, por lo cual una pregunta natural con relación a $\sqrt{2}$ es si es también un número racional, o ¿estamos en presencia de un nuevo tipo de números? Esta pregunta puede ser formulada también de la siguiente manera: ¿existe un número racional r tal que $r-\sqrt{2}=0$?

No es fácil responder esta pregunta, por ejemplo si se utiliza una calculadora, solo en caso de representación decimal finita, que no ocupe toda la capacidad de pantalla, se puede asegurar que es racional. Pero esto no es posible para $\sqrt{2}$, pues su valor en la calculadora llena toda la pantalla. Sin embargo, existen instrumentos teóricos y lógicos para probar si un número en particular es racional o irracional. Por ejemplo, argumentaremos o demostraremos a continuación por que $\sqrt{2}$ no es racional.

El método que utilizaremos se conoce como de ***reducción al absurdo***, y consiste en suponer como verdadero lo que se cree es falso, posteriormente se infieren consecuencias de la suposición y en caso de que se llegue a una contradicción con lo ya establecido como verdadero, entonces, por el principio lógico del tercero excluido, concluimos que la suposición inicial es falsa y en consecuencia su negación es la verdadera.

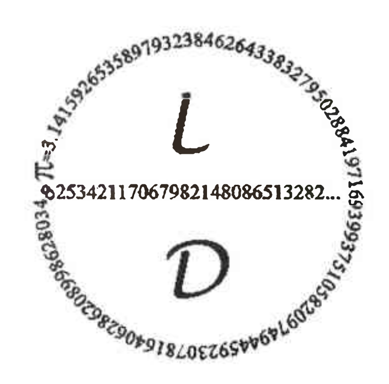
Hipótesis inicial: Supongamos que $\sqrt{2}$ es número racional, o sea, $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, donde: a y b $(\neq 0) \in \mathbb{Z}$, y que además, no tienen factores comunes.

$\therefore (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2=2b^2 \Rightarrow a^2$ *es par* $\Rightarrow a$ *es par, ¿Por qué?*

$\Rightarrow a=2n,\ n\in\mathbb{Z} \Rightarrow a^2=4n^2=2b^2 \Rightarrow b^2=\frac{4n^2}{2}=2n^2 \Rightarrow b^2$ *es par,*
$\Rightarrow b$ *es par* $\Rightarrow a$ *y* b *son pares* $\Rightarrow a$ *y* b *tienen el 2 como factor común*
$\Rightarrow$ *existe una contradicción con la suposición inicial,* $\therefore \sqrt{2}$ *no es número racional.*

En conclusión, aun cuando $\sqrt{2}$ ***no es número racional***, y en la calculadora aparezca que $\sqrt{2}=1.414213562$, en realidad tiene infinitas cifras no periódicas en su representación decimal.

Cuando al número π le asignamos el valor 3.1416, en realidad le estamos dando un valor aproximado ($\pi\approx 3.1416$) pues su representación decimal es también infinita no periódica. En la figura que sigue se muestra el origen y el valor de con aproximación de 100 dígitos en su parte decimal, además, se muestra una forma de calcularlo, con la aproximación que quieras, utilizando sumas y restas de fracciones.

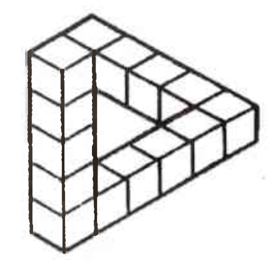


Las 100 primeras cifras decimales de π

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209 749445923078164062862089986280348

$$\pi=\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-\frac{4}{11}+\frac{4}{13}-\frac{4}{15}+\ldots$$

Así pues, podemos diferenciar los números racionales de los irracionales de acuerdo con su representación en notación decimal. Sin embargo, ante la imposibilidad práctica de constatar las infinitas cifras decimales de un número este criterio es más bien de carácter teórico. Posiblemente te sorprenda saber que hay números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y los famosos $\pi=3.1415\ldots$ y $e=2.718281828\ldots$, que no pueden escribirse como el cociente de dos enteros, o sea que no son números racionales. Estos números que se representan mediante expresiones decimales infinitas no periódicas se llaman **números irracionales.** En general:



Los números irracionales ($I=Q^c$) son aquellos que no pueden representarse de la forma $\frac{p}{q}$ con $p, q\in\mathbb{Z}$ y $q\neq 0$, y cuya representación decimal es infinita no periódica.

Operaciones y propiedades de los irracionales

Tal vez en este momento, con justa razón, te este preocupando lo relativo a las operaciones con los irracionales, sin embargo, por fortuna, para la mayoría de los problemas cotidianos con los números racionales es suficiente.

Por ejemplo, si una persona necesita calcular el área (A) de un círculo de 50 m de diámetro (D), aunque requiere del número irracional π para los cálculos, regularmente le basta con una cierta aproximación de su valor por lo cual tal vez use π=3.14, de donde su problema queda resuelto de la siguiente manera:

$$A=\pi r^2=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=(3.14)\left(\frac{50}{2}\right)^2=(3.14)(25)^2=(3.14)(625)=1962.5\ \text{m}^3$$

Ahora, si en realidad esta persona necesita conocer el área de su terreno porque lo esta vendiendo a \$3000.00 el m^2, tal vez entonces le convenga un valor de π=3.14159 ya que con este valor el área sería de:

$$A=\pi r^2=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=(3.14159)\left(\frac{50}{2}\right)^2=(3.14159)(25)^2=\underline{\hspace{4cm}}\ \text{m}^2$$

el cual es un valor mayor que el anterior, por tanto su ingreso por la venta del terreno aumentaría en \$________________________.

El problema anterior no debe hacernos concluir que siempre que se quiera hacer cálculos con números irracionales necesariamente tendrán que truncarse en su parte decimal, pues es posible operar con ellos en su representación no decimal.

Ejemplos

$\pi+\pi=2\pi,\quad \pi-\pi=0,\quad \sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2},\quad \sqrt{2}\times\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, etc.

Hasta pueden plantearse operaciones más complejas con ellos, como en:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\times\sqrt{2}}=\frac{2}{2\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1\times\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{6}\qquad\qquad =\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}$$

Con relación a las propiedades de las operaciones con racionales hay que decir que a partir de los siguientes resultados $(+\sqrt{2})+(-\sqrt{2})=0$, $\sqrt{7}-\sqrt{7}=0$, $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\sqrt{25}=5$, y $(-\pi)\div(\pi)=-1$ donde todos son racionales, se concluye que en general los irracionales no son cerrados respecto a las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

Sin embargo, respecto a la suma y la multiplicación, si cumplen en general con las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, y de la existencia de los inversos aditivos y multiplicativos. Pero, no cumplen con la propiedad de la existencia del elemento neutro aditivo y multiplicativo, pues el 0 y el 1 no son números irracionales. De donde, se pueden plantear las siguientes igualdades:

$\sqrt{2}+3\pi=3\pi+\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{13}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\sqrt{13}$

$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ $\qquad$ $\left(\sqrt{11}\times\pi\right)\times e=\sqrt{11}\times\left(\pi\times e\right)$



$(\sqrt{5})(\sqrt{15}+\pi)=(\sqrt{5}\times\sqrt{15})+(\sqrt{5}\times\pi)$ $\qquad$ $5\pi+(-5\pi)=0$

$(\sqrt{7})\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=1$ $\qquad$ $\sqrt{2}+\boxed{\textit{no existe...}}=\sqrt{2}$

Además, dado que los números irracionales pueden ser localizados en una recta numérica es lógico pensar que se pueden comparar entre si para determinar si son iguales, o quien es mayor o menor. Así tenemos que:

$\pi=3.14159...>\sqrt{2}$, $-\pi<\sqrt{3}=1.732$, $e=2.71828...>\sqrt{2}=1.41421...$

La raíz cuadrada y los números irracionales

Determina el resultado de las siguientes operaciones:

$0.25+7-7=\square$ $\qquad$ $\sqrt{3}-15+15=\square$ $\qquad$ $\frac{10\times 8}{8}=\square$ $\qquad$ $\frac{(-6)(-3)}{(-3)}=\square$

$2^2=\square$ $\qquad$ $\sqrt{4}=\square$ $\qquad$ $\sqrt{2^2}=\square$ $\qquad$ $(\sqrt{2})^2=\square$

De estos resultados se concluye que para los números a, b y $c\neq 0$, se verifica que:

- las operaciones de suma y resta son inversas, o sea: $a+b-b=a$.
- las operaciones de multiplicar y dividir son inversas, o sea: $\frac{a\times c}{c}=a$.
- las operaciones de elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada son inversas, o sea: $\sqrt[2]{a^2}=\sqrt{a^2}=|a|$.

De hecho, la definición matemática (o resultado) de la raíz cuadrada de un número positivo x ($\sqrt{x}$ donde: $x>0$) es aquel número (y) que elevado al cuadrado es igual a x. O sea, si $y^2=x$, entonces por definición: $\sqrt{x}=y$.

Ejemplos

Como $2^2=4$ y $(-2)^2=4$, entonces por definición $\sqrt{4}=2$ y $\sqrt{4}=-2$, lo cual se abrevia como $\sqrt{4}=\pm 2$. A la raíz positiva $\sqrt{4}=+2$ se le llama también raíz principal. En este sentido, ya que $1^2=1$, $(-1)^2=1$, $5^2=25$, $(-5)^2=25$, $10^2=100$ y $(-10)^2=100$, entonces por definición:

$\sqrt{1}=1$ y $\sqrt{1}=-1$, *y se abrevia:* $\sqrt{1}=\pm 1$

$\sqrt{25}=5$ y $\sqrt{25}=-5$, *y se abrevia:* $\sqrt{25}=\pm 5$

$\sqrt{100}=10$ y $\sqrt{100}=-10$, *y se abrevia:* $\sqrt{100}=\pm 10$

Cuando se tiene que realizar operaciones como: $5+\sqrt{4}=$? surge el problema de no saber cual valor de $\sqrt{4}$ considerar. Por esta razón existe el convenio para escribir $+\sqrt{4}=+2$ o $\sqrt{4}=2$ para referirse específicamente a la raíz positiva, y $-\sqrt{4}=-2$ para referirse a la raíz negativa, de donde, $5+\sqrt{4}=5+2=7$ y $5+(-\sqrt{4})=5+(-2)=3$. Nótese pues, que dependiendo del contexto $\sqrt{4}$ puede significar $\sqrt{4}=\pm 2$, o también $\sqrt{4}=2$. Esto mismo sucede con las demás raíces cuadradas, así que: $\sqrt{25}=\pm 5$ o también, $\sqrt{25}=+5$ y $\sqrt{25}=-5$. Nótese que la raíz cuadrada solamente se define para números positivos: $\sqrt{x}=y$; *donde* $x>0$. ¿Por qué tiene que ser $x>0$?

Si un número entero se eleva al cuadrado genera siempre otro número entero que es un cuadrado perfecto, el cual tiene raíz cuadrada entera. Pero, no todo número entero es cuadrado perfecto, por ejemplo el 10 no lo es, pues no proviene de ningún entero al cuadrado. Algo importante con relación a las raíces cuadradas de los números enteros que no son cuadrados perfectos es que son siempre números irracionales. A continuación se muestran las raíces cuadradas positivas de algunos números enteros positivos como números decimales no periódicos:

$\sqrt{3} \approx$	2.8284271247 4619009760 3377448419 3961571393 4375075389 6146353359 4759814649 56924...
$\sqrt{5} \approx$	2.2360679774 9978969640 9173668731 2762354406 1835961152 5724270897 2454105209 25638...
$\sqrt{6} \approx$	2.2360679774 9978969640 9173668731 2762354406 1835961152 5724270897 2454105209 25638...
$\sqrt{7} \approx$	2.6457513110 6459059050 1615753639 2604257102 5918308245 0180368334 4592010688 23230...
$\sqrt{8} \approx$	2.8284271247 4619009760 3377448419 3961571393 4375075389 6146353359 4759814649 56924...
$\sqrt{10} \approx$	2.8284271247 4619009760 3377448419 3961571393 4375075389 6146353359 4759814649 56924...

Métodos para calcular la raíz cuadrada

Para calcuar la raíz cuadrada existen varios métodos o algoritmos, siendo los más conocidos el tradicional de casita y mediante una calculadora.

Para el método tradicional de casita te recomendamos ver los siguientes videos en youtube:

https://www.youtube.com/watch?v=gOvh4qxVeS4

https://www.youtube.com/watch?v=_JeCzSuR3ko

En caso del uso de la calculadora, simplemente prendes la calculadora y presionas la tecla (función) de la raíz cuadrada $\sqrt{\ }$ (sqrt), después el número al que se le requiere sacar la raíz y finalmente el signo igual.

Ejemplos

a) Sacar raíz cuadrada al 2345.69

Solución: on → $\sqrt{\ }$ → 2345.69 → = → 48.4323239...

b) Sacar raíz cuadrada al 778642.13

Solución: on → $\sqrt{\ }$ → 778642.13 → = → 882.4...

Actividades de aprendizaje

A1) Del siguiente conjunto de números determina qué números son naturales, enteros, racionales e irracionales.

$$-9, -\frac{7}{2}, 0, \sqrt{5}, \frac{5}{4}, 2.01, 0.666, -\pi, \frac{6}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{9}, \sqrt{11}.$$

A2) Investiga cual fue el origen y el valor del número irracional π en la antigüedad.

A3) Localiza geométricamente en la recta numérica el número irracional $(3+\sqrt{2})$.

A4) ¿Localiza geométricamente en la recta numérica los irracionales π y -2π?

A5) Realiza la siguiente secuencia de operaciones en tu calculadora y encontraras el valor del número irracional e con aproximación de 9 dígitos en su parte decimal:

$$\boxed{\text{SHIFT}} \Rightarrow \boxed{In} \Rightarrow \boxed{1} \Rightarrow \boxed{=} \Rightarrow \boxed{e = 2.\qquad}$$

A6) Completa las siguientes operaciones y verifica los resultados con tu calculadora:

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{\ }}{5\times\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5})^2}{\square\times\sqrt{5}} = \frac{5}{5\times\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{\ }}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{\ }+1)} = \frac{\sqrt{2}+\square}{(\sqrt{2})^2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\square-1} = \frac{\sqrt{2}+\square}{1} = \sqrt{2}+1$$

$$\sqrt{3}\times\sqrt{5} = \sqrt{3\times5} = \sqrt{15} = \boxed{\qquad} \qquad = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = \pm\boxed{\qquad}$$

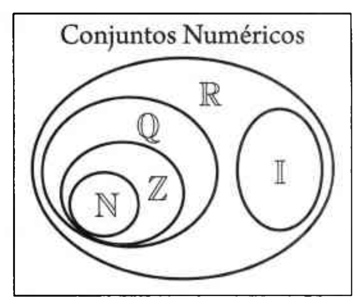
A7) Calcula manualmente, por el método tradicional de casita, la raíz cuadrada de 23 y de 2754.46 con una aproximación hasta centésimas, y comprueba tus resultados con la calculadora.

A8) Determine la longitud de la diagonal de un cuadrado cuya área es de 400 m^2.

A9) Calcula la longitud de los lados de un triángulo cuya área es 450 m^2, si se sabe que la longitud de su altura es igual a la de su base.

1.7 Números reales: Definición y representación geométrica

Cuando el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) se une con el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}=\mathbb{Q}^c$) se forma un nuevo conjunto más extenso llamado el **conjunto de los números reales**, que se denota por $\mathbb{R}$. O sea: $\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}=\mathbb{R}$.



El conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que pueden expresarse con decimales infinitos periódicos o no periódicos (en este caso un decimal finito, tal como 8.23 puede considerarse periódico de periodo 0, o sea, 8.23 = 8.23000…).

Los números reales al igual que los enteros, racionales e irracionales se pueden representar geométricamente en un recta numérica denominada la recta real. Así, pues, la recta real es un modelo geométrico del conjunto de los números reales donde el punto que corresponde al cero (0) es el origen, los puntos situados a la derecha del origen corresponden a números positivos y los puntos situados a la izquierda del origen corresponden a los números negativos.

Sentido negativo <------**Origen**------> **Sentido positivo**

$-$ $\quad -3/2 \quad 0.5 \quad \sqrt{2} \quad \pi \quad +$

… -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 …

Los números reales cubren toda la recta numérica, es decir, a cada número real que puede ser racional o irracional le corresponde exactamente un punto. Pero también a cada punto de la recta corresponde exactamente un número real.

El conjunto de los números reales es de suma importancia para este curso de matemáticas I, y para las demás asignaturas de matemáticas del bachillerato, ya que será el conjunto universal, o base, dentro del cual se realizaran todos los cálculos, ejercicios y problemas matemáticos.

Distancia y valor absoluto de un número real

Como en los enteros y racionales, el valor absoluto de un número real "a", denotado por $|a|$, representa geométricamente la distancia desde el cero (origen) hasta dicho número, por lo cual siempre es positivo.

$|-3/2|=3/2$ $\quad |+4|=4$

$-$ … -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 … $+$

Ejemplos | $|+5| = 5$ $\qquad |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ $\qquad |0| = 0$ $\qquad |-5.6| = -(-5.6) = 5.6.$

Los números reales que se encuentran a la misma distancia del cero, o que tienen el mismo valor absoluto, se llaman simétricos u opuestos. Así, +5 y −5 son simétricos, al igual que, 0.6 y −0.6 , $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, −5/7 y 5/7, etc.

En general, el valor absoluto de un número real "*a*", que representa la distancia, siempre positiva, que existe del cero a dicho número, se simboliza como:

Valor absoluto de "*a*":

$$|a|=\begin{Bmatrix} a & ,\text{si } a>0 \\ 0 & ,\text{si } a=0 \\ -a & ,\text{si } a<0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & ,\text{si } a\geq 0 \\ -a & ,\text{si } a<0 \end{Bmatrix}$$

Los valores absolutos de los números reales *a* y *b* cumplen en general con las siguientes propiedades:

a) $\|5\|=\|-5\|$	*Generalizando:* $\|a\|=\|-a\|$
b) $\|7\times 8\|=\|7\|\times\|8\|$	*Generalizando:* $\|a\cdot b\|=\|a\|\cdot\|b\|$
c) $\left\|\frac{5}{3}\right\|=\frac{\|5\|}{\|3\|}$	*Generalizando:* $\left\|\frac{a}{b}\right\|=\frac{\|a\|}{\|b\|}$; $b\neq 0$
d) $\|-10\|^2=(-10)^2$	*Generalizando:* $\|-a\|^2=(-a)^2$
e) $\|5\|=\|-5\|=\sqrt{5^2}$	*Generalizando:* $\|a\|^2=\sqrt{a^2}$



Desigualdades, intervalos y propiedades de orden en los números reales

Los números reales ℝ, como los racionales, son un **conjunto ordenado.** Esto significa que cumplen con **la propiedad de tricotomía**, o sea, que se cumple una, y solo una, de las siguientes tres posibilidades para *a* y $b\in\mathbb{R}$:

$a<b$ $\qquad$ $a=b$ $\qquad$ $a>b$

Recuerda que: **la desigualdad** $a<b$ **(*a* es menor que *b*)** es equivalente a la desigualdad $b<a$ **(*b* es mayor que *a*).**

Geométricamente $a<b$, implica que *a* se encuentra a la izquierda de *b* en la recta numérica, como se muestra en la figura de abajo. Algebraicamente, $a<b$ implica también que $b-a>0$.

Ejemplo

Si $a=5$ y $b=4$, $b-a=(+4)-(-5)=+9$, entonces, $b>a$.

a $\qquad$ *b*

Resulta evidente que si $-2<4$ y $4<7$, entonces, $-2<7$. Además, $4<7$ implica que $4+5<7+5$, $4(5)<7(5)$ y $4(-5)>7(-5)$. Estos resultados se generalizan en las siguientes **propiedades de las desigualdades** en donde a, b y $c \in \mathbb{R}$:

* Si $a<b$ y $b>c \Rightarrow a<c$
* Si $a<b \Rightarrow a+c<b+c$
* Si $a<b$ y $c>0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
* Si $a<b$ y $c<0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

La validez general de estas propiedades se puede demostrar formalmente. Como ejemplo se demuestra la propiedad que establece que se le puede sumar la misma cantidad a ambos miembros de una desigualdad si alterar su sentido:

$$a<b \Rightarrow b-c>0 \Rightarrow a-b+0>0 \Rightarrow a-b+(c-c)>0 \quad \Rightarrow a+c-b-c>0 \Rightarrow (a+c)-(b+c)>0 \Rightarrow a+c>b+c$$

Además de los símbolos de desigualdad $a<b$ y $b>a$, también se usan los símbolos de desigualdad que combinan dos posibilidades, tales como, **la desigualdad** $a \leq b$, que significa que ***a* es menor o igual que *b***, y **la desigualdad** $b \geq a$, que significa que ***b* es mayor o igual que *a***. En estas nuevas relaciones, como ya sabes, basta con que se cumpla una de las relaciones especificadas, para considerar que la desigualdad se cumple o es verdadera. Por ejemplo, $x=\sqrt{19}$ cumple con la desigualdad $x \geq 3$, y $y=-10$ cumple con la desigualdad $y \leq -10$.

Con el uso de las desigualdades aparecen de manera natural nuevos subconjuntos de los números reales llamados ***intervalos.*** Así, con los números a, b y $x \in \mathbb{Z}$ se pueden formar los siguientes subconjuntos o intervalos:

Intervalo abierto: $(a, b)=\{x \in \mathbb{R} / \ a<x<b\}$; *Geométricamente:* —$a(\leftarrow x \rightarrow)\ b$—

Intervalo abierto: $[a, b]=\{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x \leq b\}$; *Geométricamente:* —$[a \leftarrow x \rightarrow b]$ —

Intervalo abierto: $[a, b)=\{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x<b\}$; *Geométricamente:* —$[a \leftarrow x \rightarrow)\ b$—

Intervalo abierto: $(a, b]=\{x \in \mathbb{R} / \ a<x \leq b\}$; *Geométricamente:* —$a(\leftarrow x \rightarrow b]$ —

Además están los intervalos que involucran al infinito (∞):

$(a, \infty)=\{x \in \mathbb{R} / \ x>a\}$ *Geométricamente:* —$a($—$x \rightarrow)$ ...

$[a, \infty)=\{x \in \mathbb{R} / \ x \geq a\}$ *Geométricamente:* —$[a$—$x \rightarrow)$ ...

$(-\infty, a)=\{x \in \mathbb{R} / \ x<a\}$ *Geométricamente:* ...$(\leftarrow x$ —$)\ a$—

$(-\infty, a]=\{x \in \mathbb{R} / \ x \leq a\}$ *Geométricamente:* ...$(\leftarrow x$ — $a]$ —

Como los intervalos son también conjuntos, entonces se pueden realizar entre ellos las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento que ya se realizaron anteriormente con los conjuntos al inicio de la unidad.

Ejemplos

$(2, 7)=\{x \in \mathbb{R} / \ 2<x<7\}$

$[2, 7]=\{x \in \mathbb{R} / \ 2 \leq x \leq 7\}$

$(-\infty, 10)=\{x \in \mathbb{R} / \ x<10\}$

$(-\infty, 10) \cap (5, \infty)=(5, 10)$

$(5, \infty)=\{x \in \mathbb{R} / \ x>5\}$

$(-\infty, 10) \cup (5, \infty)=(-\infty, +\infty)=\mathbb{R}$

$[2, 7]^c=(-\infty, 2) \cup (7, \infty)=\mathbb{R}-[2, 7]$

Operaciones y propiedades de campo de los números reales

Hay cuatro operaciones básicas con números reales: suma, resta, multiplicación y división. De ellas la suma y la multiplicación son las dos operaciones fundamentales; la resta y la división son las operaciones inversas u opuestas de la suma y la multiplicación respectivamente. En general, los números reales *a, b* y *c* cumplen las siguientes **propiedades de campo** bajo las operaciones de suma y multiplicación.

Propiedades de campo de los números reales

Propiedad de cerradura para la suma y la multiplicación:

$a+b\in\mathbb{R}$ $\qquad$ $a\cdot b\in\mathbb{R}$

Propiedad conmutativa para la suma y la multiplicación:

$a+b=b+a$ $\qquad$ $a\cdot b=b\cdot a$

Propiedad asociativa para la suma y la multiplicación:

$(a+b)+c=a+(b+c)$ $\qquad$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Propiedad del elemento idéntico (o neutro) para la suma y la multiplicación: $a+0=a$ $\qquad$ $a\cdot 1=a$

Propiedad del elemento inverso (u opuesto) para la suma y la multiplicación:

$a+(-a)=0$ $\qquad$ $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1 \quad ; a\neq 0$

Estas propiedades son de gran importancia ya que a partir de ellas se desarrollan, y justifican lógicamente, todos los cálculos aritméticos y algebraicos con los números reales. Por ejemplo, la ley de cancelación para la suma se puede demostrar o justificar en base a estas propiedades de la siguiente manera:

Sean *a, b* y $c\in\mathbb{R}$, si se cumple que, $a+c=b+c$, entonces: $a=b$.

	Demostración
Por hipótesis:	$a+c=b+c$
Propiedad de igualdad:	$a+c+(-c)=b+c+(-c)$
Propiedad asociativa para la suma:	$a+[c+(-c)]=b+[c+(-c)]$
Propiedad del inverso para la suma:	$a+0=b+0$
Propiedad del elemento neutro para la suma:	$a=b$

Algo que sabes desde la primaria es que todo número real multiplicado por cero da como resultado cero. Aquí por primera vez conoceras una explicación formal, en base a ciertas propiedades, de tal resultado. Veamos esta demostración.

Para todo $b \in \mathbb{R}$, $b \cdot 0 = 0$.

Demostración

$0 + b \cdot 0 = b \cdot 0 = b \cdot (0 + 0)$	Propiedad del elemento neutro para la suma
$0 + b \cdot 0 = b \cdot (0 + 0)$	Propiedad transitiva de la igualdad
$0 + b \cdot 0 = b \cdot 0 + a \cdot 0$	Propiedad distrivutiva para la multiplicación
$0 = b + 0$	Propiedad de cancelación para la suma
$b \cdot 0 = 0$	Propiedad de simetría de la igualdad.

Con las propiedades de campo de los números reales también se pueden probar (cosa que no haremos), en lo particular y lo general, la validez de los resultados de las siguientes operaciones los que seguramente tu ya conoces.

Ejemplo particular		En general: sean a y $b \in \mathbb{R}$	
$(-1)(2.5) = -2.5$		$(-1) \cdot a = -a$	
$-(-1) = 8$ (Inverso aditivo de -8)		$-(-a) = a$	
$(-7)(4) = (-7)(4) = -(7 \times 4)$		$(-a)(b) = (a)(-b) = -(a \cdot b)$	
$(-3)(-5) = 15$		$(-a)(-b) = a \cdot b$	
$-(5 + 7) = (-5) + (-7)$		$-(a+b) = (-a) + (-b)$	
$\frac{-3}{7} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$	$\frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$	$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Tanto en el cálculo aritmético como en el algebraico es muy importante y necesario operar correctamente con los signos positivo y negativo. Por esa razón se debe tener siempre muy presente las operaciones y resultados del cuadro anterior donde se muestran algunas propiedades básicas de las operaciones con los signos.

Tambien, a partir de la propiedad del elemento inverso para la suma, se puede definir la resta de la siguiente manera; si el elemento inverso de $\boldsymbol{b}$ para la suma es $-\boldsymbol{b}$, entonces: $a-b = a + (-b)$

Ejemplos | $4.6 - 3.9 = 4.6 + (-3.9)$; $\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} + (-2)$

Tambien se define la división a partir de la multiplicación y de la propiedad del elemento inverso para la multiplicación de la siguiente manera; si el inverso (o recíproco) de b para la multiplicación es $\frac{1}{a}$; $b \neq 0$, entonces: $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$; $b \neq 0$.

Ejemplos | $\frac{3}{5} = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)$; $\frac{12}{9} = 12 \times \left(\frac{1}{9}\right)$

En consecuencia, la resta y la división (excepto la división por cero) también son operaciones internas en el conjunto de los números reales, o sea, cumplen la **propiedad de cerradura.** Como la resta se define como "el opuesto de la adición", entonces la propiedad distributiva también es verdadera para la sustracción:

$$a \cdot (b-c) = a \cdot [b+(-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Una operación que se presente en los números reales, y en particular en los enteros no negativos $\mathbb{Z}^+$, tiene que ver con ciertas multiplicaciones de enteros consecutivos conocidas como ***factoriales.***

Ejemplos

de factoriales:

$1 \times 2 = 2!$ (*se lee: dos factorial*) $\therefore$ $2! = 2$

$1 \times 2 \times 3 = 3!$ (*se lee: tres factorial*) $\therefore$ $3! = 6$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$ (*se lee: cuatro factorial*) $\therefore$ $4! = 24$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$ (*se lee: cinco factorial*) $\therefore$ $5! = \square$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times = (n-2) \times (n-1) \times n = n!$ (*se lee: ene factorial*)

En particular, se definen: $1! = 1$ y $0! = 1$

¿Cuántos números diferentes de 9 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si no se permite repetición de dígitos? $\square$

Como los factoriales son números, también se pueden realizar las operaciones básicas con ellos.

Ejemplo

$6! + 3! = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6) + (1 \times 2 \times 3) = 720 + 6 = 726$

$2! + 0! - 3! = 2 + 1 - 6 = -3$ $\qquad$ $(3!)^4 = (6)^4 = 1296$

$4! \times 5! = (\square)(\square) = \square$ $\qquad$ $(2!)^2(2!)^3 = (2!)^5 = \square$

$4! \times (5! + 1!) = (4! \times 5!) + (4! \times 1!) = (24 \times 120) + (24 \times 1) = \square$

$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = \left(\frac{8 \times 7 \times 6}{1}\right)\left(\frac{5!}{5!}\right) = \left(\frac{336}{1}\right)(1) = \square$

$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = \square$

Potencias de números reales con exponentes enteros

En general, si a, y $b \in \mathbb{R}$, y m y $n \in \mathbb{Z}$ entonces por definición a^n (la enésima potencia de a) indica que si $n>0$: $a^n = a \cdot a \cdot a ... \cdot a$ (a se multiplica por sí misma n veces). Y si $n=1$: $a^1 = a$.

Además, si $a \neq 0$ y $-n<0$: $a^0 = 1$ $\quad$ y $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1^n}{a^n}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

En las potencias de los números reales se cumplen tambien las leyes de exponentes que se cumplen para las potencias de los numeros racionales:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ejemplos

a) $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ b) $(2.5)^2(2.5) = (2.5)^3$ c) $(3^2)^4 = 3^8$

d) $(-12)^0 = 1$ e) $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ f) $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

g) $-3^{-4} = -\left(\frac{1}{3^4}\right) = -\frac{1}{81}$ h) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$ i) $\frac{10^9}{10^5} = 10^4$

j) $\left(-\frac{1}{6}\right)^3 = -\frac{1^3}{6^3} = -\frac{1}{216}$ k) $4^2(4^{-2} + 2^2) = 4^2 \cdot 4^{-2} + 4^2 \cdot 2^2 = 4^0 + 8^2 = 1 + 64 = 65$

l) $\frac{1}{6^{-1}} - (3^2 \div 6^2) = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 - \frac{1}{4} = \frac{23}{4}$ m) $\frac{5^7}{5^{-3}} = 5^{7-(-3)} = 5^{10}$

n) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{3^{-3}}{5^{-3}}\right) = \left(\frac{5^3}{3^3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3$

Actividades de aprendizaje

A1) Considerando al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) como el conjunto universal, cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas (V) y cuales son falsas (F):

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ______ $\quad I \notin \mathbb{R}$ ______ $\quad I \subset \mathbb{R}$ ______ $\quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$ ______

$I = \mathbb{Q}^c$ ______ $\quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ______ $\quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ______ $\quad \mathbb{Q} \cap I = \varnothing$ ______

$I^c = \mathbb{Q}$ ______ $\quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ______

A2) Escriba el valor que representa la expresión:

a) $|-7| =$ b) $|0| =$ c) $|7| =$ d) $\left|\frac{-5}{9}\right| =$

e) $|-459.37| =$ f) $|-\sqrt{3}| =$ g) $|\sqrt{3}| =$ h) $|-e| =$

i) $\left|\frac{1}{-\sqrt{5}}\right| =$ j) $|14.7-17.963| =$ k) $|-7|-|-2| =$ l) $|3-\pi| =$

m) $|4+\pi| =$ n) $\frac{-5}{|-5|} =$ ñ) $[(-5)-|-5|]^2 =$ o) $\left(|-9| + \sqrt{(-1)^2}\right)^4 =$

A3) Ordena los números reales siguientes de menor a mayor:

a) -1, -0.186, 0.099, 1, 0.42, $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, 0.111, $-\frac{1}{8}$, 0

b) 2, $\sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, -2, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}$

A4) Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalos.

$\{x \in \mathbb{R} / -7 < x < 6\} =$ $\quad \{x \in \mathbb{Z} / -7 < x < 6\} =$

$\{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 3\} =$ $\quad \{x \in \mathbb{R} / -\infty < y \leq 0\} =$

$\{w \in \mathbb{R} / -10 \leq w \leq 100\} =$ $\quad \{r \in \mathbb{R} / r < 5\} =$

$\{t \in \mathbb{R} / t > -2\} =$ $\{v \in \mathbb{R} / v - 2\} =$

$\{u \in \mathbb{R} / u \geq 1\} =$

A5) Determina el resultado, en forma de intervalos, de las siguientes operaciones.

$(4, 8) \cup (-3, 6) =$ $(4, 8) \cap (-3, 6) =$

$(-\infty, -5) \cup (5, \infty) =$ $[3, 10] \cap [9, 12) =$

$(-2, 2)^c =$ $(-\infty, +\infty) - [0.58, +\infty) =$

$[\sqrt{2}, \pi] \cap (3, 3.2) =$ $[\sqrt{2}, \pi] \cup (3, 3.2) =$

$\mathbb{R} - [0, +\infty) =$

A6) Demostrar que:

Si $a < b$ y $c > 0$, *entonces,* $a \cdot c < b \cdot c$

Si $a < b$ y $c > 0$, *entonces,* $a \cdot c > b \cdot c$

A7) Verifica mediante cálculos aritméticos que para $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ es válida la desigualdad del triángulo: $|a + b| \leq |a| + |b|$

A8) Completa la siguiente tabla de operaciones:

Si a y $b \in \mathbb{R}$, en general:	Ejemplos particulares:
$(-1) \cdot a = -a$	Ejemplo: $(-1)(3\sqrt{5}) =$
$-(-a) = a$	Ejemplo: $-(-7.32) =$
$(-a)(b) = (a)(-b) = -(a \cdot b)$	Ejemplo: $-(-2)(6) = -(\quad \times \quad) =$
$(-a)(-b) = (-a) + (-b)$	Ejemplo: $(-25)(-1000) =$
$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$	Ejemplo: $\frac{-5}{6} = \frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad}$
$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$	Ejemplo: $\frac{-8}{-15} = \frac{\quad}{\quad}$

A9) A continuación, considerando como previamente demostradas las propiedades $b \cdot 0 = 0$ y $(-a)(b) = (a)(-b) = -(a \cdot b)$, se presenta una demostración de que $(-a)(-b) = a \cdot b$. Identifica la propiedad de campo de $\mathbb{R}$ que se utilizó en cada paso:

$$(-a)(-b) = (-a)(-b) + 0 = (-a)(-b) + [(a \cdot b) + (-(a \cdot b))] = (-a)(-b) + [(-(a \cdot b)) + (a \cdot b)]$$

$$= [(-a)(-b) + (-(a \cdot b))] + (a \cdot b) = [(-a)(-b) + (-a)(b))] + (a \cdot b) = (-a)[(-b) + (b)] + (a \cdot b)$$

$$= (-a)[b + (-b)] + (a)(b) = (-a)(0) + (a \cdot b) = 0 + (a \cdot b) = a \cdot b$$

A10) Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(3.57)^2 + 26$

b) $\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \div \frac{6}{8} =$

c) $\dfrac{8.1 - \frac{1}{5}}{0.2} =$

d) $15 - (6.4)^3 + 14.4 =$

e) $-8 + (-8) + 2^3 \times 5 - 24 + 5(4 - 11) =$

f) $-14 + 17 \times 4 - 3.2 + \sqrt{144} =$

g) $94 + 15.7 \times 8^2 - 53.18 - (|-46|) =$

h) $\dfrac{(2.8)^2 (7 - 10)}{(-3)^3 + 1.5(-2)} =$

A11) Calcula aplicando las propiedades de las potencias y expresa los resultados en la forma más simple posible:

a) $(-2)^3(-2)^4=$ b) $(-12)^{-2}=$

c) $9^9 \div 9^6=$ d) $\dfrac{8^5 \times 8^{-3}}{4^4}=$

e) $(5 \times 10^2)(5^{-1} \times 10^{-2}) - \sqrt{1}=$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \div \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$

A12) Realiza las siguientes operaciones con factoriales.

a) $8! + 0!=$ b) $5! + 1! - 4!=$ c) $0! \times 1! \times 2!=$

d) $(1!)^{100}=$ e) $(3!)^3(3!)^4=$ f) $2! \times (3! + 4!)=$

g) $\dfrac{9!}{8!}=$ h) $\dfrac{12!}{8!}=$ i) $\dfrac{16!}{13}=$

Radicales, raíces y potencias

Se sabe que $\sqrt{81} = \pm 9$ y $\sqrt{100} = \pm 10$, porque $9^2 = (-9)^2 = 81$ y $10^2 = (-10)^2 = 100$. También que los números negativos no tienen raíz cuadrada en el campo de los números reales; por ejemplo, -4 no tiene raíz cuadrada porque no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -4$ (ya que el cuadrado de cualquier número real es positivo).

La raíz cúbica de un número real se puede definir en forma similar a como se hizo con la raíz cuadrada. Así, $\sqrt[3]{x} = y$ si se cumple que $y^3 = x$.

Ejemplo | 4 es raíz cúbica de 64 porque $4^3=64$, 2 es raíz cúbica de 8 porque $2^3=8$ y -2 es raíz cúbica de -8 porque $(-2)^3=-8$.

De la definición se concluye que todo número real tiene una raíz cúbica. Esta idea puede ser generalizada definiendo la raíz de índice n ($\sqrt[n]{a}$) como la operación inversa de la potenciación de exponente n. En general:

Raíz enésima de un número real

Se define la raíz enésima de a, para $a \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$, como:

$$\sqrt[n]{a} = x \;;\; \textit{si existe } x \in \mathbb{R}, \textit{ tal qué, } x^n = a$$

Notas:

1) Si no existe x, entonces a, no tiene raíz enésima en $\mathbb{R}$.

2) Si $n = 1$, $\sqrt[1]{a} = x = a$; *ya qué,* $a^1 = a$.

De la definición anterior se infiere que:

a) Si n es par, todo número real positivo tiene dos raíces enésimas, una positiva y otra negativa. Si n es impar, todo número real tiene una raíz enésima del mismo signo que a. Así pues, la raíz enésima de a para $a \geq 0$ tiene sentido para cualquiera sea el índice n par o impar.

b) Los números reales negativos no tienen raíz enésima cuando n es par. La raíz enésima de a para $a < 0$ solo tiene sentido cuando el índice n es impar.

Si el número a tiene más de una raíz enésima, se denomina **raíz enésima principal de *a*** (o también **raíz aritmética**) a la raíz enésima que tiene el mismo signo que a, y se le denota por $\sqrt[n]{a}$. En el caso de n par la raíz principal es la positiva y en caso de n impar la raíz principal es la única que existe. Así 5 es la raíz cuadrada principal de 25 ($\sqrt{25}= 5$) y -2 es la raíz cúbica principal de -8 ($\sqrt[3]{-8}= -2$).

En la expresión $\sqrt[n]{a}$, tenemos que:

- El símbolo $\sqrt{\ }$ es el signo de raíz y se llama ***radical.*** También se acostumbra llamar radical a cualquier raíz indicada de un número o de una expresión algebraica. El número (o expresión algebraica) a al cual se le calcula la raíz enésima se llama ***radicando.*** El número natural n se llama ***índice del radical*** e indica el exponente al que hay que elevar la raíz para obtener el radicando; cuando $n=2$ no se escribe y se sobreentiende que se calcula la raíz cuadrada.

Ejemplos

Cálculo de raíces:

a) Las raíces cuartas de 81 son: 3 y -3 porque $3^4= 81$ y $(-3)^4= 81$.

b) Las raíces quintas de -32 son: -2 porque $(-2)^5= -32$, o sea, $\sqrt[5]{-32}=-2$.

c) Las raíces séptimas de $\frac{1}{128}$ son: $\frac{1}{2}$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{128}$

d) Las raíces sextas de -5 son: no existen, por qué si $x\in\mathbb{R}$, entonces, $x^6\geq 0$.

e) $\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4= 81$ y 3 y 81 son ambos positivos.

f) $-\sqrt[4]{81}= -3$ porque $3^4= 81$.

g) $-\sqrt[6]{4096}= -4$ porque $4^6= 4096$.

h) $\sqrt[n]{0} = 0$ porque cualquiera sea n natural $0^n=0$.

i) $\sqrt[8]{3^{16}} = 3^2 = 9$ porque $(3^2)^8= 3^{16}$, 9 y 3^{16} son ambos positivos.

j) $\sqrt{-4}$ no tiene sentido porque -4 es negativo y la raíz es de índice 2 (par).

Está claro que para cualquier número real a para el que la raíz enésima $\sqrt[n]{a}$ tiene sentido (existe) se cumple la igualdad: $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

Ejemplos

$(\sqrt{25})^2= (5)^2= 25$

Sin embargo, la igualdad anterior no siempre tiene sentido, como ocurre por ejemplo en el caso $a=-4$ y $n=2$, dado que $\sqrt{-4}$ no existe. Este problema se presenta cuando n es par y a es un número real negativo, entonces la expresión $(\sqrt[n]{a})^n$ no significa nada.

Si n es impar, para todo a real, la expresión $(\sqrt[n]{a})^n$ siempre tiene sentido y es igual a a.

Ejemplos

$(\sqrt[3]{125})^3= (5)^3= 125$, $(\sqrt[3]{-125})^3= (-5)^3=-125$

Veamos ahora que ocurre con la expresión: $\sqrt[n]{a^n}$. Si n es par, por ejemplo $n = 2$: para $a=3$, $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$, y para $a = -3$, $\sqrt{(-3)^2}= \sqrt{9}= 3= |-3|$. En general si n es par, para cualquier número real a, $a^n \geq 0$ y entonces $\sqrt[n]{a^n} \geq 0$, esto es, se cumple que: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, en particular, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ejemplo | Si n es impar, por ejemplo $n = 3$: para $a = 2$, $\sqrt[3]{2^3}= \sqrt[3]{8}=2$, y para $a=-2$, $\sqrt{(-2)^3}= \sqrt{-8}= -2$. En general si n es impar, para cualquier número real a se cumple que: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Sea a un número real cualquiera, para n par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, en particular, $\sqrt{a^2} = |a|$. Para n impar, $\sqrt[n]{a^n}= a$.

De lo anterior queda claro que en general: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \neq \sqrt[n]{a^n}$, la igualdad no se cumple cuando n es par y $a<0$, que es el caso en que la expresión de la izquierda no tiene sentido.

Ejemplos

a) $\sqrt[4]{16}= 2$ porque: $2^4=16$ y $2 > 0$.

b) $\sqrt[5]{-243}= -3$ porque: $(-3)^5= -243$.

c) $\sqrt{(-9)^2}= |-9| = 9$ porque: $9^4= (-9)^2$ y $9 > 0$.

d) $\sqrt[3]{(-5)^3}= -5$ consecuencia directa de la propiedad.

e) $\sqrt[6]{-64}$ no existe pues $-64 < 0$.

f) $\sqrt[6]{(-2)^6}= |-2| = 2$ porque: $2^6= (-2)^6$ y $2 > 0$.

Potencias de números reales con exponente fraccionario

Recordemos primeramente que cualquier número racional puede ser expresado en forma de una fracción numérica irreducible cuyo denominador sea un entero positivo. Es decir, si r es un número racional, r siempre puede ser expresado en la forma $r = p / q$, con p entero, q entero positivo y tales que p y q no posean divisores comunes, salvo el 1 y el -1.

Ejemplo | $\frac{12}{48}=\frac{6}{24}=\frac{3}{12}=\frac{1\,(=p)}{4\,(=q)}$

Hasta este momento el trabajo con exponentes ha quedado restringido a exponentes enteros, pero se pueden utilizar los radicales para ampliar el concepto de potencia al caso de ***exponentes racionales fraccionarios.*** Además, se quiere que se cumplan tambien las leyes de exponentes que se cumplen para las potencias de los números reales con exponentes enteros.

$$a^n \cdot a^m= a^{n+m} \qquad (a^n)^m= a^{n\cdot m} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$$

Así pues, si son validas para la potenciación de exponente racional las mismas propiedades que para exponente entero. Entonces:

$4^{1/2} \times 4^{1/3} = 4^{1/2+1/3} = 4^{5/6}$ $\qquad [(7.92)^{2/3}]^{1/5} = (7.92)^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}} = (7.92)^{\frac{2}{15}}$

$6^{2/7} \div 6^{1/4} = 6^{\frac{2}{7}-\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{28}}$ $\qquad \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$

$\left((0.5)\left(\frac{6}{7}\right)\right)^3 = (0.5)^3\left(\frac{6}{7}\right)^3$ $\qquad 7^{-1/2} = \frac{1}{7^{1/2}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{1/2}$

Con estas consideraciones previas, y con la intención de investigar sobre el significado de una potencia de exponente fraccionario, analizamos los siguientes casos donde la base de las potencias es un número real positivo o cero:

$\sqrt{5} = x$, *donde* $x^2 = 5$. Pero, $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{2}} = 5$. *Por tanto:* $5^{\frac{1}{2}} = x = \sqrt{5}$.

$\sqrt{9} = 3$, *porque* $3^2 = 9$. Pero, $3^2 = 9 = 9^1 = 9^{\frac{2}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2$, *de donde,* $3 = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt[2]{9^1}$.

$\sqrt[3]{8} = 2$, *porque* $2^3 = 8$. Pero, $2^3 = 8 = 8^1 = 8^{\frac{3}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3$, *de donde,* $2 = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8^1}$.

$\sqrt{4^3} = 8$, *porque* $8^2 = 4^3 = 64$. Pero, $8^2 = 4^3 = (4^3)^1 = (4^3)^{\frac{2}{2}} = \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 \Rightarrow 8 = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt[2]{4^3}$.

En suma, de los casos anteriores se observa que:

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = \sqrt{5^1}$ $\qquad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt[2]{9^1}$ $\qquad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8^1}$ $\qquad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt[2]{4^3}$

Estos resultados particulares pueden ser generalizados en la siguiente definición:

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

donde: ***a*** es un número real positivo, y ***r = m/n*** es la expresión irreducible de un número irracional ***r***, con ***m*** entero y ***n*** natural.

Observaciones:

- En particular, si $m=1$, se cumple que: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- Si además, $m \geq 1$ y $a = 0$, se define: $0^r = \sqrt[n]{0^m} = 0$. La condición $m \geq 1$ en el caso $a = 0$ es para evitar la indefinición que se produce al dividir por cero.
- Si $n = 1$, $a^r = a^{m/1} = a^m$.

Los exponentes racionales son particularmente útiles cuando se calculan raíces de números utilizando calculadora, para reducir el índice de un radical y para simplificar expresiones encontradas en cálculo.

Propiedades de los radicales

Los radicales cumplen propiedades que son consecuencia inmediata de su definición y de las propiedades de las potencias de exponente racional.

Ejemplos | $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (a \times b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = (a)^{\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Propiedades de los radicales. En general, sí a y $b \in \mathbb{R}$, y suponiendo que las raíces indicadas existen (están bien definidas), además m y $n \in \mathbb{N}$, entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5. $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$, $k \in \mathbb{N}$
6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
7. Para n par, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$; en particular, $\sqrt{a^2} = |a|$
8. Para n impar, $\sqrt[n]{a^n} = a$

Estas propiedades son de mucha aplicación en las operaciones con radicales, en la introducción y extracción de factores en el radical, en la racionalización de denominadores y en la simplificación de radicales. En ellas se considera que los números reales ***a*** y ***b*** son tales que las raíces indicadas existen, a tales efectos se suele exigir que ***a*** y ***b*** sean positivos, lo que es una condición suficiente muy cómoda para trabajar. Sin embargo, la propiedad 6 en el caso n impar se cumple para cualquier valor real de a; y la propiedad 7 se cumple para cualquier valor real de a.

En el caso en que la base de la potencia sea un número real positivo, a partir de la definición anterior y de las propiedades de los radicales, podemos inferir que, cualesquiera sean los números enteros m y n, con n positivo, se verifica la igualdad: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

En efecto, si $\dfrac{p}{q}$ (con $q \geq 1$) es la representación irreducible del número racional $\dfrac{m}{n}$, entonces $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$, de donde se obtiene que $m \cdot q = p \cdot n$. Entonces:

$$a^{m/n} = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q \cdot n]{a^{p \cdot n}} = \sqrt[q \cdot n]{a^{q \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$$

La igualdad $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ se cumple cuando a es positivo aunque m, n no sean necesariamente primos relativos, por lo que al calcular se puede trabajar directamente con la fracción no reducida.

Ejemplos

$3^{6/4} = 3^{3/2} = \sqrt{3^3}$, también, $3^{6/4} = \sqrt[4]{3^6}$ por la propiedad anterior.

$8^{4/6} = 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ $\quad$ $8^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 4$ $\quad$ $3^{4/2} = 3^2 = 9$

$25^{3/6} = 25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$ $\quad$ $2^{-1/2} = 2^{\frac{-1}{2}} = \sqrt{2^{-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$

$8^{-2/3} = 8^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{1}{4}$ $\quad$ $7^{8/12} = 7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49} \approx 3.66$

La extensión de la definición anterior al caso en que la base a sea un número real negativo no siempre es posible. En efecto, en el caso en que el denominador n de la fracción irreducible sea un número natural par, se requiere que el número a^m sea positivo para que pueda existir su raíz enésima. Pero, al ser a negativo, esto sólo puede ocurrir si m también es par, lo que contradice la irreducibilidad de la fracción m/n. De este modo, en el caso en que a sea un número real negativo, solamente puede asumirse la definición anterior para la potencia $a^{m/n}$ en el caso en que n sea un número natural impar.

Así tenemos que:

> Sea a es un número real negativo, y sea $r = m/n$ la expresión irreducible de un número racional r, con m entero y n natural impar. Entonces:
>
> $$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Observación: Hasta con la restricción introducida para la definición de las potencias de exponente racional y base negativa, resulta importante señalar que, en este caso, la propiedad $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ en general no se cumple. Si la propiedad $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ fuera cierta, sería $(-9)^{2/2} = \sqrt{(-9)^2}$; sin embargo ya conocemos que $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9 \neq -9 = (-9)^{2/2}$.

Ejemplos

a) $(-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1$

b) $(-3)^{3/4}$ no está definida (¿Por qué?)

c) $(-5)^{2/4} = (-5)^{1/2}$ no está definida ($a = -5$, $n = 2$ par)

d) $(-1)^{1/2}$ no está definida ($a = -1$, $n = 2$ par)

e) $(-8)^{2/6} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$ $\quad$ $(-8)^{3/9} = (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

f) $(-2)^{1/5} \cdot 3^{1/5} = (-2 \cdot 3)^{1/5} = (-6)^{1/5}$

Simplificación de radicales y reducción de radicales a un índice común

En el trabajo con los radicales es conveniente trabajar con ellos simplificados. Para simplificar un radical es frecuente realizar las transformaciones siguientes.

> **Un radical está simplificado cuando:**
>
> - El índice no tiene factores comunes con el exponente del radicando.
> - Se han extraído los factores que son raíces exactas.
> - El radicando no tiene denominador.

Ejemplos

a) Reducir el índice del radical.

$\sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6\div 3]{5^{3\div 3}} = \sqrt{5}$ $\quad$ $\sqrt[8]{5^6} = \sqrt[4\cdot 2]{5^{3\times 2}} = \sqrt[4]{5^3}$ $\quad$ $\sqrt[12]{3^{24}} = \sqrt[12\div 6]{3^{24\div 6}} = \sqrt[2]{3^4} = 9$

$\sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[12\div 3]{2^{18\div 3}} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$ $\quad$ $\sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6\div 3]{2^{3\div 3}} = \sqrt{5}$

b) Extraer factores del radical.

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$ $\quad$ $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = \sqrt[5]{2^5\times 2^2} = \sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{4} = 2\sqrt[5]{4}$

$\sqrt{1080} = \sqrt{2^2\times 3^2\times 2\times 3\times 5} = 2\times 3\sqrt{30} = 6\sqrt{30}$

A veces es necesario introducir factores en un radical, para ello es necesario elevarlos a un exponente igual al índice del radical.

Ejemplos $\quad 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2\times 3} = \sqrt{25\times 3} = \sqrt{75}$ $\quad$ $2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{2^3\times 6} = \sqrt[3]{8\times 6} = \sqrt[3]{48}$

En la práctica se hace necesario calcular con radicales que tienen índices diferentes y, para hacerlo, en muchas ocasiones **es necesario reducirlos a un índice común.** Esta reducción a un índice común es completamente análoga a la reducción de fracciones a un denominador común; recuerda que los radicales se pueden escribir como potencias de exponente racional.

> Para reducir dos radicales a un índice común:
> 1) Se busca el mcm de los índices.
> 2) En cada radical, se multiplica el índice y el exponente del radicando por el factor necesario para que el índice sea el mcm hallado.

Ejemplos

Los radicales $\sqrt[9]{36}$ y $\sqrt[6]{6}$, ya que mcm de 9 y 6=18, se pueden expresar con el mismo índice así: $\sqrt[9]{36} = \sqrt[9]{6^2} = \sqrt[18]{6^4}$ y $\sqrt[6]{6} = \sqrt[6\cdot 3]{6^{1\cdot 3}} = \sqrt[18]{6^3}$.
De igual forma el índice común de $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{4}$ es:
$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$ y $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16}$.

Suma y resta de radicales

Los radicales que tienen igual índice e igual radicando se llaman radicales semejantes. Por tanto, los radicales $2\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[3]{7}$ y $-5\sqrt[3]{7}$ son semejantes.

> Para sumar y restar radicales semejantes procederemos igual que cuando reducimos términos semejantes.

Ejemplos

De suma o resta:

$3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ $\qquad$ $-8\sqrt[3]{a}+6\sqrt[3]{a}=-2\sqrt[3]{a}$

Solo se pueden sumar y restar radicales si estos son semejantes. Para poder determinar si dos o más radicales son semejantes, debe primeramente simplificarse cada radical, como se muestra a continuación:

$3\sqrt{8}+-2\sqrt{18}+4\sqrt{50}=3\sqrt{4\times2}-2\sqrt{9\times2}+4\sqrt{25\times2}=3\sqrt{4}\sqrt{2}-2\sqrt{9}\sqrt{2}+4\sqrt{25}\sqrt{2}=20\sqrt{2}$

$4\sqrt[3]{5}-6\sqrt[6]{25}=4\sqrt[3]{5}-6\sqrt[6]{5^2}=4\sqrt[3]{5}-6\sqrt[3]{5}=-2\sqrt[3]{5}$

Multiplicación y división de radicales

En la multiplicación y división de radicales es necesario que los radicales tengan el mismo índice ya que se aplican las propiedades:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\div b};\ (a,b>0)$$

En la práctica para multiplicar o dividir radicales diferenciamos dos casos:

- Los radicales tienen igual índice.
- Los radicales tienen índices diferentes.

En el primer caso aplicamos directamente las propiedades anteriores. En el segundo caso reducimos primero a un índice común y aplicamos las propiedades.

Ejemplos

$4\sqrt{3}\times5\sqrt{2}=20\sqrt{3\times2}=20\sqrt{6}$

$2\sqrt{5}\times6\sqrt[3]{2}=2\sqrt[6]{5^3}\times2\sqrt[6]{2^2}=12\sqrt[6]{125\times4}=12\sqrt[6]{500}$

$\sqrt{18}\div\sqrt{6}=\sqrt{18\div6}=\sqrt{3}$

$\sqrt{2}\div\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^2}\div\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{4\div8}=\sqrt[6]{0.5}$

Para simplificar completamente un radical es necesario, como ya se dijo, que no aparezcan fracciones en el radical, o lo que es equivalente, que no aparezcan radicales en el denominador. Esto puede lograrse mediante un procedimiento que se conoce como **racionalización de los denominadores.**

Ejemplos

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{3}$

En los ejemplos anteriores los denominadores contienen un solo radical, se trata de denominadores monomios cuya racionalización es sencilla. Cuando en el denominador aparecen dos radicales que no son semejantes (no se pueden reducir) se habla de denominadores binomios y para racionalizarlos se hace uso de expresiones conjugadas, tales como:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \text{y} \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}, \quad a, b > 0$$

Las cuales tienen la propiedad de que al multiplicarse dan un resultado sin radicales.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$$

Ejemplo

$$\frac{2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3}=-2(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

Si el denominador es de la forma $a-b\sqrt{m}$ (o también, $a+b\sqrt{m}$) su conjugada es $a+b\sqrt{m}$ (o respectivamente, $a-b\sqrt{m}$) y se cumple que:

$$(a-b\sqrt{m})(a+b\sqrt{m})=(a)^2-(b\sqrt{m})^2=a^2-b^2m$$

Ejemplo

$$\frac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{1-3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{15}}{-2}$$

Por supuesto que también se pueden racionalizar los numeradores.

Ejemplo

$$\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{3}(\sqrt{2}-3)}=\frac{2-9}{(\sqrt{3}\sqrt{2}-3\sqrt{3})}=\frac{-7}{(\sqrt{6}-3\sqrt{3})}$$

Actividades de aprendizaje

A1) Calcula y simplifica aplicando las propiedades de las potencias:

a) $4^{1/3}\times 4^{1/2}=$

b) $10^{\frac{3}{5}}\times 10^{\frac{1}{2}}\times 10^{\frac{2}{3}}=$

c) $(4^5)^{-1/2}=$

d) $20^{-3/2}\div 20^{-1/2}=$

e) $\frac{6}{4^3}\div(2\times4^{-3})=$

f) $(2^{-1}\times4^{-2}\times5^3)^2=$

A2) Calcular el valor de las expresiones:

a) $\sqrt[4]{16}=$

b) $-\sqrt{121}=$

c) $\sqrt[5]{-32}=$

d) $\sqrt[15]{1}=$

e) $\sqrt[3]{0.27}=$

f) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{16}\right)(5)}=$

g) $5\sqrt{100}=$

h) $\sqrt[4]{625}-\sqrt[3]{-125}=$

A3) Comprobar, mediante cálculos aritméticos, que en general:

a) $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

b) $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a^2-b^2}\neq a+b$

A4) Escribe las siguientes raíces con el menor índice posible:

a) $\sqrt[8]{3^4}=$ b) $\sqrt[6]{3^2\times5^4}=$ c) $\sqrt[9]{(2+\pi)^6}=$ d) $\sqrt{6^4\div4^{12}}=$

A5) Escribe las siguientes raíces con el índice n indicado:

a) $\sqrt[3]{3^5}=\sqrt[6]{\quad}$ b) $\sqrt{2^5}=\sqrt[4]{\quad}$ c) $\sqrt[5]{2}=\sqrt[10]{\quad}$ d) $\sqrt[7]{\frac{1}{2}}=\sqrt[21]{\frac{}{}}$

A6) Escribe las siguientes potencias como raíces.

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^{2/3}=$ b) $(a)^{3/7}=$ c) $\left(\frac{9}{5}\right)^{4/5}=$ d) $12^{-1/3}=$

e) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-1/3}=$ f) $(0.06)^{-2/4}=$

A7) Calcular el valor de las siguientes expresiones.

a) $4^{1/2}=$ b) $81^{1/4}=$ c) $125^{2/3}=$ d) $32^{2/5}=$ e) $64^{4/6}=$ f) $16^{2/4}=$

A8) Escribe las siguientes raíces como potencias.

a) $\sqrt[3]{5}=$ b) $\sqrt[4]{10^3}=$ c) $\sqrt[5]{(0.5)^2}=$ d) $\sqrt[5]{(2^{-1})^{-2}}=$ e) $\sqrt[6]{(6\times4)^2}=$

A9) Calcula aplicando las propiedades de las potencias y los radicales:

a) $4(4^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{2}})$ b) $(5^{1/2}+2^{1/2})(5^{1/2}-2^{1/2})=$ c) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt[3]{-20}=$

d) $\sqrt[3]{40}\div\sqrt[3]{-5}=$ e) $\sqrt[4]{9^2}=$ f) $(\sqrt[3]{2})^4=$ g) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6}}=$

h) $\sqrt[3]{3^6\div5^3}=$ i) $\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{\sqrt{5}}=$ j) $\sqrt{5\sqrt{5}}=$

A10) Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[6]{16}=$ b) $\sqrt[6]{5^3}=$ c) $\sqrt[6]{2^8}=$ d) $\sqrt[n]{7^{n^2}}=$ e) $\sqrt[4]{10^7}=$ f) $\sqrt{24}=$

A11) Introduce el factor en el radicando:

a) $5\sqrt[3]{4}=$ b) $2\sqrt{4}=$ c) $4\sqrt[5]{3}=$

A12) Reduce los siguientes radicales a un índice común:

a) $\sqrt{5}\,;\sqrt[5]{3}=$ b) $\sqrt[3]{9}\,;\sqrt{64}=$ c) $\sqrt[4]{12}\,;\sqrt[3]{2}$

A13) Efectúa las siguientes operaciones:

a) $4\sqrt{3}+5\sqrt{3}=$ b) $5\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}=$ c) $7\sqrt[5]{6}+\sqrt[5]{6}-8\sqrt[5]{6}+15\sqrt[5]{6}=$

d) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-4\sqrt{5}=$ e) $2\sqrt{3}-13\sqrt{8}-6\sqrt{3}+22\sqrt{8}=$ f) $(5\sqrt{5})(3\sqrt{5})=$

g) $\sqrt{6}\times\sqrt{5}\times\sqrt{7}=$ h) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=$ i) $(2-\sqrt{3})^2=$

j) $\sqrt[3]{88}\div\sqrt[3]{11}=$ k) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=$ l) $\sqrt{6}\div2\sqrt[4]{3}=$

A14) Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{14}{5\sqrt[3]{2}}=$ b) $\frac{2}{\sqrt{7}-3}=$ c) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=$ d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}+\sqrt{2}}=$



2 Lenguaje algebraico y polinomios

Propósito de unidad

Utiliza, y comprende, el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar y modelar situaciones problemáticas diversas, y lo aplica a las operaciones con polinomios y al planteamiento y resolución de problemas en diversos contextos.

Contenido

- **Modelación y lenguaje algebraico:** Ejemplos contextualizados de modelos matemáticos (variables, expresiones algebraicas, fórmulas, ecuaciones, funciones, progresiones y series). Cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas. Dominio de una expresión algebraica. Conceptos de variable y expresión algebraica. Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa. Término algebraico: concepto, definición y componentes. Progresiones y series aritméticas y geométricas. Clasificación de expresiones algebraicas: polinomiales, racionales e irracionales.

- **Polinomios:** Definición de términos semejantes. Simplificación de expresiones algebraicas con términos semejantes. Suma y resta de polinomios. Producto de monomio por monomio. Producto de monomio por polinomio. Producto de polinomio por polinomio. Símbolos de agrupación. Operaciones combinadas de suma, resta y multiplicación de polinomios que tienen símbolos de agrupación. Productos notables (Binomio al cuadrado. Binomio al cubo. Teorema del binomio para exponentes naturales. Producto de dos binomios con un término común. Producto de binomios conjugados). División de polinomios: Monomio entre monomio. Polinomio entre monomio y polinomio entre polinomio.

Indicadores de desempeño

En esta unidad debe lograrse que los alumnos sean capaces de:

1) Identificar las fórmulas, las ecuaciones, las funciones y las expresiones algebraicas en general como representaciones simbólicas, modelos matemáticos, de situaciones y problemas concretos de las ciencias, la ingeniería y la vida cotidiana.
2) Calcular el valor numérico de expresiones algebraicas, así como, determinar para que valores está definida una expresión algebraica.
3) Diferenciar el lenguaje común del lenguaje matemático. Además de traducir, en diversos contextos, del lenguaje común al algebraico y viceversa.
4) Definir, identificar y diferenciar los conceptos: término algebraico, expresión algebraica y polinomio. Definir y reducir términos semejantes.
5) Dominar los algoritmos para la adición, sustracción, multiplicación y división con polinomios. Además de Identificar y calcular los productos notables en los cálculos algebraicos.
6) Desarrollar habilidades en la simplificación de expresiones que contengan paréntesis superpuestos, así como expresiones donde aparezcan en forma combinada las distintas operaciones básicas con términos y polinomios.

2 unidad



Actividad preliminar: ¿Para que sirve el lenguaje algebraico? ¿Qué es el álgebra?

Ver los siguientes videos:
http://www.youtube.com/watch?v=yc-X-SlusBw
http://www.youtube.com/watch?v=PFw6_tdyPyg
http://www.youtube.com/watch?v=eMTBDC3i6O8

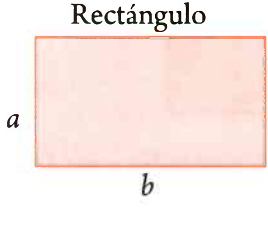
El desarrollo y aplicación del lenguaje matemático constituye una premisa esencial y básica para lograr el nivel de generalidad y abstracción que la matemática ha alcanzado, por eso es importante que en esta unidad enfaticemos en los aspectos sintáctico y semántico del lenguaje algebraico, o sea, el operar formal y correctamente con la simbología y reglas de operación, a la vez que se comprenda el significado del trabajo con la simbología y las operaciones con las variables; especialmente, la traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa.

2.1 Modelación y lenguaje algebraico

Modelos matemáticos: fórmulas, variables, expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones

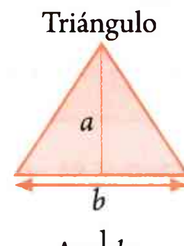
Desde la primera unidad utilizas las letras para representar números y sabes que puedes realizar con ellas las mismas operaciones que con los números. Así, has estado usando las siguientes fórmulas, o **modelos matemáticos**, para calcular áreas para el rectángulo, el triángulo, el círculo y el volumen de una esfera.

Rectángulo



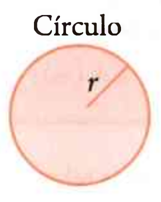
$A=ba$

Triángulo



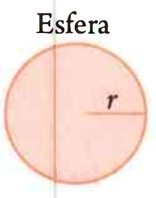
$A=\frac{1}{2}ba$

Círculo



$A=\pi r^2$

Esfera



$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Veamos algunos ejemplos de cálculo sobre el uso de estas fórmulas:

1) Calcular el área (A) del rectángulo de largo 10 cm (b=10) y ancho 6 cm (a=6).

   Resolución: A=(10 cm)(6 cm)=60 cm^2.

2) Calcular el área (A) del triángulo de base 20 cm (b=10) y altura 8 cm (a=8).

   Resolución: A= (0.5)(20 cm)(8 cm)=80 cm^2.

3) Calcular el área (A) del círculo de radio 5 cm (r=5).

   Resolución: A= (3.1416)(5 cm)^2=78.54 cm^2.



4) Calcular el volumen (V) de la esfera de radio 10 cm (r=10).

   Resolución: V= (4/3)(3.1416)(10 cm)^3= 4188.8 cm^3.

En estos modelos matemáticos, o fórmulas, las letras o símbolos (a, b, r, A, y V) representan cantidades o magnitudes que pueden variar de un problema a otro, por lo que reciben el nombre de ***variables,*** mientras que el valor del símbolo 1, 2, 3, 4 y π no cambia por lo que reciben el nombre de ***constantes.***

De la Aritmética al Álgebra: las propiedades de campo como modelos

También, cuando se estudiaron las **propiedades de campo de los números reales** se enfatizó que en general, los números reales a, b y c pueden representar cualesquier número real (variables) en tanto que las propiedades son modelos matemáticos de las operaciones entre ellos.

Propiedad de cerradura para la suma y la multiplicación:

$a + b \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $a \cdot b \in \mathbb{R}$

Propiedad conmutativa para la suma y la multiplicación:

$a + b = b + a$ $\qquad$ $a \cdot b = b \cdot a$

Propiedad asociativa para la suma y la multiplicación:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ $\qquad$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Propiedad del elemento idéntico (o neutro) para la suma y la multiplicación:

$a + 0 = a$ $\qquad$ $a \cdot 1 = a$

Propiedad del elemento inverso (u opuesto) para la suma y la multiplicación:

$a + (-a) = 0$ $\qquad$ $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1,\ a \neq 0$

Así, las operaciones concretas tales como: 5+0=5, 6.83+0=6.83, etc., son representadas o modeladas por la propiedad del neutro aditivo a+0=a.

Mientras que con el modelo de la propiedad distributiva $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$ se representan un número infinito de operaciones particulares, tales como:

$$3\times(5+1)=(3\times5)+(3\times1) \quad \text{y} \quad 0.32\times(4-10)=(0.32\times4)+(0.32\times(-10))$$

En este sentido cuando en la unidad anterior se definió la suma de m veces el número natural o real a:

$$\underbrace{a+a+a+...+a}_{m\ \text{veces}}= m \cdot a$$

en esencia lo que se estaba haciendo también era generalizar un número infinito de operaciones aritméticas y algebraicas particulares, tales como:

$6+6+6+6= 4 \times 6=24$	$(-5)+(-5)+(-5)+(-5)= 4\,(-5)$
$16538= 1 \times 16538$	$(3/2)+(3/2)+(3/2)+(3/2)= 4\times(3/2)=12/2=6$
$2.8+2.8+2.8+2.8= 4\times 2.8$	$8+8+5+5+5=(2\times 8)+(3\times 5)=16+15=31$
$2+2+2+2+2=5\times 2 = 5 \times 4 = 20$	$(4+6)+(4+6)+(4+6)= 3\times(4+6)= 3\times 10= 30$
$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=4$	$(a+b)+(a+b)+(a+b)= 3\times(a+b)$
$ab+ab+ab+ab= 4ab$	

Con estos ejercicios de generalización de las operaciones aritméticas se esta entrando a un nuevo campo de estudio de las matemáticas: ***EL ÁLGEBRA.***

El Álgebra se define como una rama de las matemáticas que consiste en una generalización de la Aritmética. Donde, los números particulares (en nuestro caso serán los números reales) son representados en lo general por letras que pueden ser constantes o variables. Las que a su vez se combinan y relacionan mediante las operaciones para formar expresiones matemáticas más complejas.

Una de las grandes ventajas que tiene el Álgebra sobre la Aritmética es que mediante el uso de las variables se obtiene un nivel de generalidad en los cálculos que posibilitan la representación o modelación matemática de un sinnúmero de situaciones problemáticas donde intervienen tanto cantidades o magnitudes conocidas como desconocidas.

Por ejemplo, para calcular la distancia (d) recorrida por un cuerpo en caída libre cerca de la superficie terrestre durante un cierto tiempo (t) se usa el modelo matemático algebraico, o ***función matemática***, $d= 0.5gt^2$, donde la magnitud desconocida d depende, o esta en función de, el tiempo t, en tanto que la aceleración de la gravedad es una magnitud conocida $g= 9.8\ m/seg^2$ que se considera constante durante el fenómeno físico que se esta modelando.

Con las variables y las operaciones matemáticas básicas, también se pueden representar o modelar situaciones concretas que se presentan en nuestro lenguaje común; en este caso, diremos que estamos realizando una ***traducción del lenguaje común al lenguaje matemático.***

Ejemplos

El doble de un número: $2x$.

La diferencia de dos números: $a-b$.

La suma de la mitad de un número con su triple: $\frac{w}{2} + 3w$.

La suma de tres números enteros consecutivos: $x + (x+1) + (x+2)$; $x\in\mathbb{Z}$.

El área del triángulo es igual a un medio del producto de la base por la altura: $A= \frac{1}{2}ba$.

Por supuesto que también se puede realizar el ejercicio inverso, o sea, ***traducir del lenguaje algebraico al lenguaje común.***

Ejemplos

$x+3x$: Un número más su triple (o aumentado en su triple).

$m-2n$: Un número menos el doble de otro.

$\frac{y}{2}+\frac{y}{3}$: La mitad de un número aumentado en la tercera parte de el mismo.

x^2-y^2: La suma de los cuadrados de dos números.

$x-\frac{x}{2}+1$: Un número disminuido en su mitad y aumentado en uno.

$(a+b)^3= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: Un binomio al cubo es igual al cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primer término por el segundo término, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.

Desarrollar la habilidad para traducir del lenguaje común al algebraico y viceversa es una condición indispensable para el planteo y solución de problemas matemáticos, como se podrá apreciar en este curso, y los siguientes, de Matemáticas.

Las expresiones matemáticas como las anteriores reciben el nombre particular de expresiones algebraicas. Por tanto:

Expresiones Algebraicas son aquellas expresiones matemáticas donde los números y las variables aparecen relacionados por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación.

Ejemplos

De expresiones algebraicas:

$2x-1$ $\quad x + (x+1)+ (x+2)$ $\quad m \cdot (p+4)$ $\quad \frac{y}{2}+\frac{y}{3}$ $\quad x^2 - y^2$ $\quad 2m \cdot (c- d)$

$7x+10$ $\quad \frac{w}{2} + 3w$ $\quad 5a$ $\quad \sqrt{x^2-9}$ $\quad x - \frac{x}{2}+1$ $\quad -6x\sqrt[3]{y}+3y^4-10x^5$

$\frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad 4x^2 + 4x+1$ $\quad h$ $\quad a-b$ $\quad -6.82yx^3 + \sqrt{7}$ $\quad \sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2}$

$\left(\frac{2a}{b}+c^3\right)^{\frac{2}{3}}$ $\quad (x^3-2.6)^2$ $\quad \frac{1}{2}gt^2$ $\quad \frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$ $\quad \frac{a + 1}{a^2 - a + 1}$

Las expresiones algebraicas combinadas con los símbolos de igualdad (=) y desigualdad (<, >, ≥, ≤ y ≠) se pueden relacionar entre sí para formar otras expresiones o relaciones matemáticas más complicadas y/o útiles, tales como:

Ejemplos

De ecuaciones y/o fórmulas:

$7x +10= 2x-1$; $x^2+3x-18= 0$; $\sqrt{5x-1}= x-3$; $ax + by + c= 0$

$h=\frac{1}{2} gt^2$; $a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$; $F= m \cdot a$; $F= G\frac{M \cdot m}{d^2}$; $E= m \cdot c^2$

$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$; $m= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $d=\sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2}$; $m_1 \cdot m_2= -1$

Ejemplos

Inecuaciones:

$2x + 3 > x-1$; $x^2 - 9 \geq 0$; $|2x+5|<7$; $2y - 4 \neq 0$; $x + 2y \leq 4$

Funciones matemáticas:

$y= mx + b$; $A=x^2$; $f(x)= ax^2 + bx + c$; $y= ax^3$; $y= \sqrt{x}$

Término algebraico: concepto, definición y componentes

En particular, cuando los números reales particulares de una expresión aritmética cualquiera, formada por operaciones de multiplicación, división, potenciación o radicación, son reemplazados por letras o variables se forma una expresión algebraica simple conocida como término algebraico.

Ejemplos

$6^3= 6 \times 6 \times 6= 216$ ← *sustituyendo 6 por x se forman...* → x^3 o $x \cdot x \cdot x$

$(2.5)^2(2.5)= (2.5)^3$ ← *sustituyendo 6 por x se forman...* → $y^2 \cdot y$ o y^3

En general:

Una variable o cualquier combinación de números y variables relacionados por algunas de las operaciones de multiplicación, división, potenciación o radicación se llama **término algebraico.**

Ejemplos

Términos algebraicos:

x, xy, z, $-4x^3y$, $6.8a^2bc$, -97.12, $\frac{\sqrt{2}\,a}{b^3}$, $\frac{4wx^{-2}}{3y^{-5}}$

En un término la parte formada por las variables se llama ***parte literal.*** En los términos siguientes la parte literal aparece destacada con color naranja:

$3\,\boxed{xy}$; $\boxed{a^2b}$; $-0.5\,\boxed{\frac{x}{y}}$; $10\,\boxed{a^{-2}b}$; $-\,\boxed{x}$

El factor numérico que interviene en un término se llama ***coeficiente*** y por lo general se coloca al principio. En los términos siguientes el coeficiente aparece destacado con color naranja:

$\boxed{3}\,xy$; $\boxed{\frac{5}{3}}\,a^2b$; $\boxed{-0.5}\,\frac{x}{y}$; $a^{-2}b$; $-x^2$

Notas: (1) En el término $a^{-2}b$ el coeficiente es 1, sin embargo, no aparece porque cuando es 1 no se acostumbra escribirlo. (2) En el término $-x^2$ el coeficiente es -1, pero solo se escribe el signo "–" ya qué el 1 se sobreentiende.

Los términos de una expresión algebraica son las partes separadas por una suma (adición) o una resta (sustracción). Como se puede observar, las expresiones algebraicas más complejas resultan de la suma o resta de términos algebraicos. De donde, un término algebraico (o simplemente término en lo sucesivo) es, como ya se dijo, un caso particular de expresión algebraica. Por ejemplo en las expresiones: $-8xy+ab$, los términos son: $-8xy$ y ab , $3x^2 + w$, los términos son: $3x^2$ y w.

En el caso de las expresiones $2m \cdot (c-d)$, $(x^3-1.5)^2$ sus términos no son explícitos, pero si las desarrollamos según las operaciones indicadas podríamos encontrar sus términos.

Ejemplos

Para, $2m \cdot (c-d)= 2mc-2md$, los términos son: $2mc$ y $-2md$.

Para, $(x^3-1.5)^2= x^6-3x^3+2.25$, los términos son: x^6, $-3x^3$ y 2.25.

Cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas y fórmulas

Como en las expresiones algebraicas, o en las fórmulas, las letras o variables representan números reales, entonces dichas variables pueden sustituirse por números y calcular su valor. De donde:

Si en una expresión algebraica se sustituyen las variables por números y se efectúan las operaciones indicadas, el valor resultante (si existe) recibe el nombre de **valor numérico de la expresión algebraica.**

Por ejemplo, para $a=-2$, $b=\frac{1}{4}$ y $c=0.6$, el valor numérico de la siguiente expresión algebraica es:

$$\frac{a^2b-5c}{a+1}=\frac{(-2)^2\cdot\frac{1}{4}-5(0.6)}{-2+1}=\frac{4\cdot\frac{1}{4}-3}{-1}=\frac{1-3}{-1}=\frac{-2}{-1}=-2$$

En el caso anterior, la expresión algebraica dada carece de valor numérico para $a=-1$ debido a que al sustituir la variable por este valor, el denominador se anula y la división por cero no está definida. Por tanto, en esta expresión algebraica, las variables a, b y c pueden ser sustituidas por números reales cualesquiera excepto el caso $a=-1$.

En general no se puede calcular el valor numérico de una expresión algebraica si algún denominador se anula, o sea, si se hace cero cuando se sustituyen las variables que aparecen en ella por sus valores respectivos. Los valores de la variable para los cuales el valor numérico existe, son los ***valores admisibles*** de la variable. Así, pues, se llama ***dominio*** de una expresión algebraica al conjunto de los valores admisibles.

Ejemplos

Determinación del dominio:

a) La expresión $3x+2$ está definida para todo x real, ya que la variable puede ser sustituida por cualquier número real y siempre será posible calcular el valor numérico de esta expresión.

b) La expresión $\frac{7}{3-m}$ está definida para todo m real, tal que $m\neq3$, debido a que el denominador se anula para $m=3$.

c) La expresión $a+\frac{b}{a}$ está definida para cualesquiera a, b reales, con $a\neq0$.

d) La expresión $\frac{2-3x}{6+y}$ está definida para cualesquiera x, y reales, con $y\neq-6$.

e) La expresión $\frac{5}{x^2-1}$ no está definida para $x=1$ y $x=-1$, pues $(1)^2-1=(-1)^2-1=0$ y la división entre cero no esta definida. Pero, si esta definida para cualesquier otro valor diferente de 1 y −1.

f) La expresión $\sqrt{x^2-9}$ esta definida para cualesquier $x\in\mathbb{R}$, tal que, $x^2\geq9$, pues el radicando en una raíz cuadrada no debe ser negativo.

Observación. No se debe confundir el signo del valor numérico de una expresión algebraica (o de un término) con el signo de su coeficiente.

Por ejemplo, el valor numérico del término $-3xy^2$, para $x=-5$ y $y=-2$ es: $-3(-5)(-2)^2=-3(-5)(4)=60$.

De la misma forma, para $m= 2$, $n= -1$ y $p= -1$, el valor numérico del término $\frac{5}{2}m^2n^3p^4$ es:

$$\frac{5}{2}(2)^2(-1)^3(-1)^4 = \frac{5}{2}(4)(-1)(1) = -10.$$

En este sentido es importante apreciar ***la diferencia entre el opuesto de un número y un número negativo.*** Si x es ya negativo, entonces su opuesto, $-x$, es positivo. Por ejemplo, si $x= -3$, entonces $-x=-(-3)=3$.

Una vez que se sabe calcular el valor numérico de expresiones algebraicas, es fácil calcular una variable de una fórmula o función cuyo valor depende de otras variables, o del valor numérico de otras expresiones algebraicas, presentes en dicha fórmula.

Por ejemplo, para calcular la pendiente (m) de una línea recta se aplica la fórmula $m= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, donde los valores de las variables x_2, x_1, y_2, y_1 son las coordenadas de los puntos $P_2(x_2, y_2)$ y $P_1(x_1, y_1)$por donde pasa la recta. Por lo cual el valor de la pendiente de una recta que pasa por los puntos $P_2(x_2=6, y_2=5)$ y $P_1(x_1=-2, y_1=3)$es:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-3}{6-(-2)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}= 0.25$$

Para este ejemplo, también se puede calcular la distancia (d) que hay entre los puntos $P_2(x_2=6, y_2=5)$ y $P_1(x_1=-2, y_1=3)$ de la recta aplicando la fórmula:

$$d= \sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2}= \sqrt{(5-3)^2 + (6-(-2))^2}= \sqrt{4+64}= \sqrt{68}= \approx 8.25.$$

Progresiones y series aritméticas y geométricas (opcional)

Un modelo matemático muy importante son las secuencias ordenadas de números reales de una sucesión que se representan como:

$$a_1, a_2, a_3,..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1},... \qquad \textit{donde: } a\in\mathbb{R} \quad \text{y} \quad n\in\mathbb{R}$$

y a_n recibe el nombre de termino general o enésimo término.



- La sucesión de los números naturales:
  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,...
- La sucesiónde los números enteros:
  ..., −4, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, +4, ...
- La sucesión de los enteros no negativos:
  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
- La sucesión de los números naturales pares o múltiplos de 2:
  2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...
- La sucesión de los números naturales impares:
  1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...
- La sucesión de los números primos:
  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
- Otras sucesiones menos familiares son:
  5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 ; 7, 4, 1, -2, -5,... ; 2, 4, 8, 16, 32,...



Una sucesión puede ser finita (cuando tiene un último término) o infinita, y se puede determinar describiendo o listando sus elementos, o dando una expresión o fórmula matemática para el término general de tal suerte que a partir de él se pueda generar.

Así, la sucesión de los naturales pares queda también determinada por su término general $a_n = 2n$, ya que a partir de él se puede generar: $a_1 = 2 \times 1 = 2$, $a_2 = 2 \times 2 = 4$, $a_3 = 2 \times 3 = 6$, ...

¿Cuáles son los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = 6n - 2$?

$a_1 = 4$, $a_2 =$ ______, $a_3 =$ ______, $a_4 =$ ______, $a_5 =$ ______

¿Cuál es el término general de la sucesión de los números naturales impares? $a_n =$ ☐

¿Cuál es el término general de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, a_n = \frac{☐}{☐}$?

Existe sucesiones que no pueden ser determinadas mediante una fórmula matemática para su término general, ya sea porque no se conoce todavía o porque, tal vez, sea imposible hacerlo. Un ejemplo de esto es la sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,...

Dentro del conjunto infinito de las sucesiones existen dos particularmente importantes por el principio de regularidad que permite generarlas y definirlas, así como por sus múltiples aplicaciones: las progresiones aritméticas y geométricas. Las sucesiones 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 y 7, 4, 1, −2, −5,... son ejemplos de progresiones aritméticas, la primera es finita y la segunda infinita. Mientras que 2, 4, 8, 16, 32, 64,... y 5, −0.5, 0.05, −0.005, 0.0005 son ejemplos de progresiones geométricas, la primera es infinita y la segunda finita.

¿Cuál es el principio de regularidad que genera o define una progresión aritmética?

____.

¿Cuál es el principio de regularidad que genera o define una progresión geométrica?

____.

¿Se pueden sumar los términos de una sucesión? Por supuesto que sí, y a dichas sumas se les conoce como series. Si los términos que se suman son de una sucesión o progresión aritmética se tiene una ***serie aritmética,*** y si los términos que se están sumando son de una sucesión o progresión geométrica se trata de una ***serie geométrica.***

Por ejemplo, la serie aritmética (simbolizada por S_n, donde n es el número de términos que se suman) correspondiente a la sucesión aritmética 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 , es: $S_n = 5+10+15+20+25+30+35 =$ ☐.

Y la serie geométrica (S_n) correspondiente a la sucesión geométrica 5, −0.5, 0.05, −0.005, es:

$S_n = 5+(-0.5)+0.05+(-0.005) =$ ☐.

Sí una persona chismosa en un tiempo de una hora cuenta un chisme a 3 personas diferentes, y estas no se lo cuentan a nadie más, ¿cuántas personas conocen el chisme al cabo de 10 horas? Respuesta: ______________________.

Sí una computadora de valor inicial de $20,000.00 se deprecia $2,000.00 anualmente, ¿cuál será su valor al final de 7 años? Respuesta: ______________________.

Situaciones y problemáticas como las anteriores dan origen a una progresión aritmética, por lo que resulta importante su estudio. Pero, ¿qué es una progresión aritmética?

Una **progresión aritmética** finita o infinita es una clase de sucesión en la que cada término (a_n), excepto el primero, se obtiene sumando al anterior (a_{n-1}) una cantidad fija predeterminada denominada **diferencia** (d). De donde:


F. Gauss

Primer término (n–1): $a_1 = a_1$

Segundo término (n=2): $a_2 = a_1 + d$

Tercer término (n=3): $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

Cuarto término (n=4): $a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

⋮

Enésimo término (n=n): $a_n = a_{n-1} + d =$ ______

El **término general** (o enésimo término) a_n de una progresión aritmética, o sea el término que ocupa el número de orden n en la misma, se puede determinar a partir del valor del primero de los términos (a_1) mediante la expresión matemática: $a_n = a_1 + (n-1) \times d$.

Así, los primeros cuatro términos de una progresión aritmética, con d=5 y cuyo primer término es a_1=5, son: a_1=5, a_2=10, a_3=15, a_4=20. Y el doceavo término de esta misma progresión es:

$a_{12}=5+(12-1)\times 5= 5+(11)(5)= 5+55=60.$

¿Cuáles son los primeros 6 términos de una progresión aritmética cuyo tercer y cuarto términos son respectivamente el 12 y el 8 ? Resolución:

Como $a_4 = a_3 + d \Rightarrow d = a_4 - a_3 = 8-12= -4$

además, $a_4 = a_1 + (4-1) \times d \Rightarrow 8 = a_1 + (3)(-4) = a_1 - 12 \Rightarrow a_1 = 8+12 = 20$

$\therefore a_1 = 20, a_2 = 16, a_3 = 12, a_4 = 8, a_5 = 4, a_5 = 0$

Problema: En una sala de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 860 cm, y la sexta, 1340 cm. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de 2300 cm? Resolución:

Como a_1=800 y $a_6 = 1340 = a_1 + (6-1)d = 860 + 5d \Rightarrow d = \frac{1340-860}{5} = 96$ cm

además, $a_n = 2300 = a_1 + (n-1)d = 860 + (n-1) \times 96 = 860 + 96n - 96$

$\Rightarrow 2300 - 860 + 96 = 96n \Rightarrow 1536 = 96n \Rightarrow n = \frac{1536}{96} = 16$

∴ *la persona se encuentra en la fila 16.*

Problema: Sofía planea hacer una rifa, y decide elaborar 100 números numerados del 1 al 100, de tal manera que la persona que participe seleccionará un número al azar y pagará una cantidad en pesos igual al número seleccionado. Si el objeto que se rifa tiene un costo de $985.00, ¿cuánto ganaría Sofía si logra vender todos los números? En este caso la suma o **serie aritmética** que se quiere calcular es:

$$S_{100} = 1+2+3+...+98+99+100 = ?$$

La cual se puede calcular aplicando la propiedad asociativa para la suma de números reales y aplicando la estrategia de formar parejas que den el mismo resultado.

$S_{100} = 1+2+3+...+98+99+100 = (1+100)+(2+99)+...+(50+51) = (101)(50) = 5050$

∴ *la ganancia (G) de Sofía será de:* G= $(5050–985)= $4, 065.00.

Esta estrategia de sumar el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, y así sucesivamente, se puede generalizar:

$S_n= a_1+a_2+a_3+...+ a_{n-1} + a_n= (a_1+a_n)+(a_1+a_{n-1})+...+\left(a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}\right)$

Como las sumas de los sumandos asociados son iguales, y se tienen n/2 sumas entonces:

$S_n= (a_1+a_n)\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{n \cdot (a_1+a_n)}{2}$; *Con la hipótesis: n es par.*

Aunque la fórmula para la serie aritmética se dedujo para n par, también es válida cuando n es impar. Verifiquémoslo con el siguiente ejemplo.

Ejemplo

$S_7= 7+10+13+16+19+22+25= ?$ *(Observese que n es impar)*

Cálculo directo: $S_7= (7+25)+(10+22)+(13+19)+16= (32)(3)+16= 112$

Cálculo con las fórmula: $S_7=\frac{n \cdot (a_1+a_n)}{2}=\frac{7 \times (7+25)}{2}=\frac{7 \times 32}{2}=\frac{224}{2}= 112$

Nota: Es común usar también la siguiente notación compacta para representar una serie:

$$S_n= \sum_{i=1}^{n} a_i= a_1+a_2+a_3+...+a_n$$

Así la serie S_{10}, cuyo término general es $a_n= n^2$, puede ser representada también como:

$$S_{10}= \sum_{i=1}^{n} a_i= 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100= 385= \sum_{i=1}^{10} i^2$$

Como ya se dijo una ***progresión geométrica*** se define como aquella en las que cada término, después del primero, se obtiene multiplicando el anterior por un valor fijo r predefinido que se conoce como **razón.** En general: a_1, $a_2= a_1 \cdot r$, $a_3= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$,..., $a_n= a_1 \cdot r^{n-1}$ *(Enésimo término)*

Así, el número de granos de trigo por casilla que tenía que pagar el rey en la leyenda del juego del ajedrez forman una progresión geométrica finita: 1, 2, 4, 8, 16, 32,..., a_{64}=[ ], en la cual la razón es igual a 2 (r=2).

Otro ejemplo de progresión geométrica (pero infinita) es: 384, 96, 24, 6, 3/2,..., la cual tiene una razón r=[ ].

¿Cuáles son los primeros 6 términos de una progresión geométrica infinita, con r=0.5 y cuyo primer término es a_1= 40? Y ¿Cuál es el noveno termino de esta misma progresión? Solución: los primeros seis términos son 40, 40 × 0.5= 20, 20 × 0.5=10, 10 × 0.5=5, 5 × 0.5=2.5, 2.5 × 0.5=1.25,..., y el noveno término de esta misma progresión es $a_9= a_1 \cdot r^{9-1}= 40 \times (0.5)^8= 0.15625$.

Problema: un automóvil se deprecia 15% de su valor cada año. ¿Cuál será el valor del automóvil al final de seis años si originalmente costo $ 170, 000.00?

Solución: a_1= 170000, a_2= 170000 × 0.85= 144500, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7

donde: a_7= 170000 × $(0.85)^{7-1}$= 170000 × 0.377149515= $ 64, 115.4

Una aplicación comercial importante de las progresiones geométricas, que ya se estudio en tema de los porcentajes, es el cálculo del capital acumulado bajo interés compuesto. Recordemos que el capital final acumulado (C_f) que se obtiene al depositar en una cuenta bancaria un capital inicial (C_i) durante un cierto tiempo t en años, al tanto por ciento anual r con interés compuesto, puede ser calculado directamente mediante la fórmula:

$$C_f= C_i\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Ejemplo

Calcular los diferentes capitales acumulados por una inversión inicial de $30,000.00 depositado a plazos de uno, dos, tres y cuatro años en una cuenta bancaria donde se paga el 20% anual. Resolución:

Para $t=0$: $C_f = (\$30,000.00)\left(1+\frac{20}{100}\right)^0 = (\$30,000.00)(1+0.20)^0 = \$30,000.00$

Para $t=1$: $C_f = (\$30,000.00)\left(1+\frac{20}{100}\right)^1 = (\$30,000.00)(1+0.20)^1 = \$36,000.00$

Para $t=2$: $C_f = (\$30,000.00)\left(1+\frac{20}{100}\right)^2 = (\$30,000.00)(1+0.20)^2 = \$43,200.00$

Para $t=3$: $C_f = (\$30,000.00)\left(1+\frac{20}{100}\right)^3 = (\$30,000.00)(1+0.20)^3 = \$51,840.00$

Para $t=4$: $C_f = (\$30,000.00)\left(1+\frac{20}{100}\right)^4 = (\$30,000.00)(1+0.20)^4 = \$62,208.00$

Como se observa en los cálculos anteriores, tenemos aquí una progresión geométrica con $a_1 = \$30,000.00$ y $r = (1+0.20) = 1.2$. Por tanto, la formula para calcular C_f es en realidad una fórmula específica (del término general) para determinar los términos de una progresión geométrica, donde cada termino representa el capital acumulado.

Los términos consecutivos de una progresión geométrica finita (o infinita) se pueden sumar formando una ***serie geométrica finita (o infinita).*** Una serie geométrica finita con pocos términos puede calcularse directamente, o mediante el siguiente procedimiento más práctico si la serie tiene un número grande de términos:

$S_5 = 2+6+18+54+162 = 242$ *(calculando en forma directa). Por el otro procedimiento se multiplica por la razón* $r = 54/18 = 3 \Rightarrow 3 \cdot S_5 = 6 + 18 + 54 + 162 + 486$. *Si ahora a* S_5 *se la resta* $3 \cdot S_5$, *se obtiene el resultado:*

$S_5 - 3 \cdot S_5 = 2 + 6 + 18 + 54 + 62 - 6 - 18 - 54 - 162 - 486 = 2 - 486$

$\Rightarrow S_5(1-3) = 2-486 \;\Rightarrow\; S_5 = \frac{2-486}{1-3} = \frac{-484}{-2} = 242$

Para observar como generalizar el procedimiento, expresamos la última expresión como:

$$S_5 = \frac{2-486}{1-3} = \frac{2(1-243)}{1-3} = \frac{2(1-3^5)}{1-3}$$

Generalizando, pues, el procedimiento anterior tendremos que:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \quad ; \; r \neq 1$$

Nota: la fórmula anterior para calcular S_n sólo es válida si $r \neq 1$, ya que si $r=1$ todos los términos de la progresión geométrica serían iguales, y la suma sería entonces: $S_n = \boxed{}$.

Ejemplo

a) Calcular la serie geométrica correspondiente a los primeros 10 términos de la progresión geométrica infinita 2, 6, 18, 54,... Resolución: en este caso se observa que $a_1 = 2$ y se deduce fácilmente que $r=3$, por lo tanto $S_{10} = \frac{2(3^{10}-1)}{3-1} = 59049$.

b) **Problema:** "Hace muchos siglos, en un país de oriente vivía un rey que había perdido a su hijo en una batalla. A causa de esta tragedia había decidido encerrarse en su castillo y no hablaba con nadie. Uno de sus ministros llamó a todos los científicos y filósofos del reino para que buscaran una posible solución a la tristeza del rey. Uno de ellos inventó un juego de estrategias, el ajedrez. El rey no sólo volvió a sonreír sino que se volvió



un gran maestro de este juego. Quedó tan feliz con el invento que decidió recompensar al inventor con lo que él pidiera. El joven que había creado el ajedrez pidió lo siguiente: un grano de trigo en la primera casilla del tablero, dos granos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho en la cuarta, dieciséis en la quinta y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas del tablero de ajedrez. El rey muy tranquilo, pidió a los matemáticos del reino que calcularan el número de granos de trigo que debían pagarse al muchacho; al cabo de un rato, los científicos regresaron con una gran sorpresa: ¡no alcanzaba todo el trigo del mundo para pagar el juego de ajedrez!"

¿Cuál es el número total de granos de trigo que tenía que pagar el rey en la leyenda del juego del ajedrez?

Solución: $S_{64}=\dfrac{1\times(2^{64}-1)}{2-1}=2^{64}-1=1.844674407\times10^{19}$

Cuando la progresión geométrica es infinita con $r>1$, la progresión crece indefinidamente y la suma de sus términos tiende a infinito ($S_n\rightarrow\infty$). En cambio, si $r<1$, cada término será menor que el anterior, y la progresión se irá aproximando a 0 conforme aumente el número (n) de sus términos. Además, si $|r|<1$, también r^n se aproximara cada vez más a 0 ($r^n\rightarrow0$) y entonces:

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1(1-\cancel{0})}{1-r}\quad\Rightarrow\quad S_\infty=\frac{a_1}{1-r}$$

Por ejemplo, para la progresión geométrica infinita 40, 20, 10, 5, 2.5, 1.25,…, cuya razón es r=0.5, se tiene que:

$$S_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{40}{1-0.5}=80$$

Actividades de aprendizaje

A1) Escribe tres operaciones aritméticas particulares que pueden ser representadas en lo general con la propiedad del inverso aditivo.

A2) Utiliza el modelo matemático algebraico, o ***función matemática***, $d=0.5\,gt^2$ para calcular la distancia (d) recorrida por un cuerpo en caída libre cerca de la superficie terrestre para los siguientes tiempos (t):

Tiempo: t	Distancia recorrida: $d=0.5\,gt^2$
t=1 seg.	$d=0.5\,gt^2=0.5\times(9.8\ m/seg^2)(1\ seg)^2=4.9\ m$
t=2 seg.	
t=3 seg.	
t=4 seg.	
t=5 seg.	
t=6 seg.	
t=7 seg.	
t=8 seg.	
t=9 seg.	
t=10 seg.	

Recuerda que la aceleración de la gravedad es: $g=9.8\ m/seg^2$.

A3) Representa mediante expresiones matemáticas lo siguiente:

a) Un número excede a otro número en 4:______________________.
b) El triple del cuadrado de un número:__________________ .
c) Un número disminuido en cinco:____________________ .
d) El cuadrado de la diferencia de dos números:__________________.
e) El cuadrado de un número aumentado en cuatro es igual al doble de dicho número:________________.
f) El valor absoluto del producto de dos números es igual al producto de los valores absolutos de dichos números:________________.
g) La tercera potencia del cociente de dos números:__________
h) La raíz enésima de un número:______________.
i) El factorial de un número entero positivo:_________________________.
j) La suma de tres números enteros consecutivos es igual a cero:___________.
k) El área (A) de un rectángulo es igual a la longitud (L) multiplicada por su anchura (a):________________.
l) El perímetro de un polígono regular de n lados:_________________.
m) El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios de pi (π) por el radio (r) al cubo:_______________________
n) La edad de Pedro es 3 años más que la de su hermana María:___________.

A4) Encuentre el modelo o la relación matemática que representa la siguiente situación:

a) Pedro es 3 años mayor que su hermana María, y dentro de 7 años ella tendrá seis séptimos de la edad de el:___________________________.
b) La suma de tres números enteros consecutivos impares es igual sesenta y nueve:

____.

c) El denominador de una fracción es 4 unidades mayor que el numerador, y si a cada termino de la fracción se le agregan 5 unidades, la fracción resultante es equivalente a dos tercios:_____________________.
d) La velocidad promedio ($\bar{v}$) de un automóvil viene dada por el cociente de la distancia (d) recorrida entre el tiempo (t) empleado en recorrerla:_____________.

A5) Traduce las expresiones algebraicas siguientes al lenguaje común:

a) $4n-n^2$: ____.
b) $\frac{a+b}{2}$: ____.
c) $x+\frac{x}{5}$: ____.
d) $\sqrt{x+y}$: ____.
e) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$: ________________________________.
f) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:________________________________.

A6) Describe dos situaciones problemáticas diferentes que puedan ser representadas con el siguiente modelo matemático: $y = x \cdot z$.

____

____.

A7) a) Escribe una expresión algebraica de un término:

b) Escribe una expresión algebraica de dos términos:

c) Escribe una expresión algebraica de tres términos:

d) Escribe una expresión algebraica de cinco términos:

A8) a) Escribe un término algebraico cuya parte literal sea x^3y^5:

b) Escribe un término algebraico cuyo coeficiente sea –5.35:

c) Escribe dos términos algebraicos diferentes pero de igual parte literal:

d) Escribe dos términos algebraicos diferentes pero de igual coeficiente:

A9) Calcula el valor numérico (en caso de que exista) de las expresiones algebraicas siguientes, para los valores de las variables que se indican en cada caso.

a) $3a^2b + 2a$ — Para $a = -0.5$; $b = \frac{2}{3}$

b) $(4x^2 + y)^2$ — Para $x = 1.5$; $y = 6$

c) $\frac{b^2c + 3d}{b - 2}$ — Para $b = -3$; $c = \frac{2}{3}$; $d = -0.5$

d) $\frac{5x^2}{x + yz}$ — Para $x = -1$; $y = 4$; $z = \frac{1}{4}$

e) $4x^2 + 3y^2z^{-3}$ — Para $x = \frac{1}{2}$; $y = 4$; $z = -2$

f) $2x\sqrt{x^3 + 2b} + 2b^0$ — Para $x = 3$; $b = -1$

A10) ¿Para qué números reales están definidas las expresiones algebraicas siguientes?

a) $2a-5$ b) $\frac{b-2}{b+5}$ c) $\frac{2a}{a-b}$ d) $\sqrt{8-p}$ e) $\frac{2-m}{m-1}$

f) $\frac{b}{c} + \frac{b}{c-2}$ g) $\frac{2m+n}{mn-p}$ h) $\sqrt{6-2t}$ i) $\frac{10}{x^2-16}$

A11) Para la función lineal $y = 3x-2$, calcula en la tabla adjunta los diferentes valores de la variable dependiente "y" correspondiente a los siguientes valores de la variable independiente "x":

Valores de la variable independiente "x"	Valores de la variable dependiente "y": $y = 3x-2$
$x=1$	$y = 3(1)-2 = 3-2 = 1$
$x = -20$	
$x=4$	
$x=0$	
$x = -5$	
$x = 3.5$	

A12) La fórmula del área de un cilindro circular recto es $A= 2\pi r^2+2\pi rh$, donde r es el radio del cilindro y h es su altura. ¿Cuál es el área de un cilindro de 20 cm. de radio y 50 cm. de altura?

A13) calcular la pendiente (m) de una línea recta que pasa por los puntos $P_2(x_2= -3, y_2= 4)$ y $P_1(x_1= 2, y_1= -8)$. Además, calcular la distancia (d) que existe entre los dos puntos dados.

A14) ¿Cómo obtendrías la sucesión 5, 10, 15, 20, ... a partir de la sucesión de los números naturales? ______________________. Y ¿Cuál es la expresión matemática correspondiente al término general de esta sucesión? $a_n=$ ☐

A15) De la sucesión 7, 4, 1, −2, −5, ... , encuentra:

$a_6=$________ $a_8=$________ $a_{15}=$________ $a_n=$ ☐

A16) De la sucesión 2, 4, 8, 16, 32,..., encuentra:

$a_3=$________ $a_8=$________ $a_{10}=$________ $a_n=$ ☐

A17) Inventa o construye tres sucesiones diferentes, pero similares, a las sucesiones

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 ; 7, 4, 1, -2, -5, ... ; 2, 4, 8, 16, 32, ...

____________________ ; ____________________ ; ____________________

A18) Escribir los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término general es $a_n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

$a_1=$______ $a_2=$______ $a_3=$______ $a_4=$______ $a_5=$______

A19) Escribir los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término general es $a_n= 2\times 3^{-n}$.

$a_1=$______ $a_2=$______ $a_3=$______ $a_4=$______ $a_5=$______

A20) De la sucesión 7, 4, 1, −2, −5,..., encuentra la suma de sus primeros 10 términos:

$S_{10}=$ ☐

A21) De la sucesión 2, 4, 8, 16, 32, ... , encuentra la suma de sus primeros 12 términos.

$S_{12}=$ ☐

A22) De la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,..., encuentra: (a) la expresión o fórmula de su término general y (b) la suma de sus primeros 10 términos (S_{10}).

A23) Escribe 10 términos de la progresión aritmética finita en la cual $a_1= 8$ y $d= 1.5$.

A24) Escribe 6 términos de la progresión aritmética infinita en la cual $a_1= -50$ y $d= 10$.

A25) Escribe 5 términos de la progresión aritmética infinita cuyo término general es

$a_n= -4+(n-1)\times 4$.

A26) Escribe 8 términos de la progresión aritmética finita cuyo término general es

$a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\left(\frac{3}{2}\right)$.

A27) ¿Cuáles son los primeros 8 términos de una progresión aritmética infinita cuyo segundo y tercer términos son respectivamente el −3 y el −1 ?

A28) Determinar el primer término de una progresión aritmética sabiendo que $a_{10}= 31$ y $d= 4$.

A29) Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 0.8, la diferencia 0.3 y el enésimo término es 3.8, hallar el número n de términos.

A30) Por la renta de una casa se acuerda pagar $8000.00 al mes durante el primer año, y cada año se aumentará la renta en $600.00 mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 9 años?

A31) Calcula la suma de los primeros cincuenta múltiplos de 10.

A32) Calcular S_8 de una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 2 + (n-1) \times 7$.

A33) Si el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de sus primeros nueve términos.

A34) La suma de los primeros once términos de una progresión aritmética es 176 y la diferencia de los extremos es 30. Listar los términos de la progresión.

A35) Halla los ángulos de un triángulo sabiendo que están en progresión aritmética.

A36) Si 210 porristas forman un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga una porrista, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?

A37) Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Halla las edades de los cuatro hermanos.

A38) Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día. ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de 15 días? ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de 30 días?

A39) Calcular la serie S_n de todos los números naturales impares desde $a_1 = 1$ hasta $a_n = 1111$.

A40) Escribe 5 términos de la progresión geométrica finita en la cual $a_1 = 8$ y $r = 3$.

A41) Escribe 6 términos de la progresión geométrica infinita en la cual $a_1 = -50$ y $r = 0.5$.

A42) Calcula el décimo término de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.

A43) El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los seis primeros términos de dicha progresión.

A44) Escribe 7 términos de la progresión geométrica infinita cuyo término general es $a_n = -4 \times 7^{n-1}$.

A45) Determinar el primer término de una progresión geométrica sabiendo que $a_5 = 6250$ y $r = 5$.

A46) Escribe 8 términos de la progresión geométrica finita cuyo término general es

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

A47) ¿Cuáles son los primeros 7 términos de una progresión geométrica infinita cuyo tercer y cuarto términos son respectivamente 20 y 40 ?

A48) En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?

A49) Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.

A50) En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.

A51) Una computadora se deprecia 10% de su valor cada año. ¿Cuál será el valor de la computadora al final de cinco años si originalmente costo $ 12, 000.00?

A52) Se tiene un barril de vino que contiene 2048 litros. Si en un día se vendió la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vender la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se vendió el décimo día?

A53) Calcular el capital y el interés acumulado por una inversión inicial de $20,000.00 depositado a cuatro años de plazo en una cuenta bancaria donde se paga el 18% anual.

A54) La población mundial en 1978 era aproximadamente de 4×10^9. Si la población aumentara un 2% cada año, ¿cuál sería la población mundial en el año 2007?

A55) Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...

A56) Halla la suma de los términos de la progresión geométrica infinita: 8, 4, 2, 1,...

A57) Calcular S_8 de una progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 6 \times 5^{n-1}$.

A58) La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla el primero y el séptimo términos.

A59) Halla la fracción generatriz del número racional (de expansión decimal periódica) 0.434343... como suma de los términos de una progresión geométrica infinita.

A60) Dado un cuadrado de 1 m. de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

A61) Si una persona ahorra un peso un día, dos pesos al segundo día, 4 pesos al tercer día, y así sucesivamente hasta completar un mes de 30 días. ¿Cuánto ahorraría el último día? Y ¿Cuánto ahorraría en total durante todo el mes?



Clasificación de las expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se clasifican en: racionales e irracionales.

Son expresiones algebraicas irracionales aquellas donde aparecen variables dentro de un radical o con exponentes fraccionarios.

Ejemplos | $x^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{x+1}$; $\sqrt{2xy-y^2}$; $\dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$; $(a-b)^{\frac{3}{5}}\sqrt{a+b}$;

Son expresiones algebraicas racionales aquellas donde no aparecen variables dentro de un radical o con exponentes fraccionarios.

Ejemplos | x^{-2} ; $\sqrt{2}\,x^2+y-20$; $\frac{x+2}{x-3}$; $3x^4-2y^3+7$; $3a-\frac{5}{c}$; $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^3+y^3}$

A su vez las expresiones algebraicas racionales se clasifican en: fraccionarias y polinomiales.

Una expresión algebraica racional es fraccionaria (o fracción algebraica) cuando contiene variables en los denominadores o divisores.

Ejemplos | $\frac{3}{x}$; $\frac{3x^2-6x+4}{x+2}$; $\sqrt{2}\,x^3y+\frac{5x}{3y}+0.23$; $(2x-y)^{-3}$; $\frac{2}{a+b}$;

Una expresión algebraica racional es polinomial (polinomio o entera) cuando no contiene variables en los denominadores o divisores.

Ejemplos | $3x^2-6x+4$; $\sqrt{2}\,x^3y+\frac{5}{3}xy^2+0.23$; $(2x-y)^3$; $\frac{a+b}{2}$;

2.2 Polinomios

Un **polinomio** es la suma algebraica (adición o sustracción) de dos o más términos, donde los exponentes de las variables son enteros no negativos.

Ejemplos | De polinomios:

$-3x^4y^3z^2$ $4w^8-0.13w$ b^2-b+20 $5x^3-4x^2+3x-8$

$5abc-2b^3-4a^2c+6bc^2-3$ $4w^8-0.13w$ $x^5-7x^4y+12x^3y^2-30x^2y^3+15xy^4+y^5$

Como se puede observar los polinomios están definidos para todos los valores reales de las variables.

Como casos especiales importantes de polinomios tenemos los **monomios, binomios y los trinomios.**

Monomio: es un polinomio de un solo término, donde las variables aparecen con exponentes enteros no negativos.
Se denomina **grado de un monomio** a la suma de los exponentes de las variables que contenga.

Ejemplos

a) $3x$: es un monomio de grado 1 (o de primer grado).
b) $2a^2$: es un monomio de grado 2 (o de segundo grado).
c) $r\,s\,t$: es un monomio de tercer grado.
d) $4\,m^3n$: es un monomio de cuarto grado.
e) 8 : es un monomio de grado cero.

En general, los términos en que sólo aparece el coeficiente numérico tienen grado cero. A veces se considera el grado de un monomio con respecto a alguna de las variables que contiene. Por ejemplo, en el inciso d el monomio $4m^3n$ es de tercer grado con respecto a m y de primer grado con respecto a n.

Binomio: es un polinomio de dos términos. O también, la suma algebraica de dos monomios.

Ejemplos | x^2y+4 $\quad \frac{y}{3}-\frac{x}{2}$ $\quad 3x^2-x$ $\quad 4m^3-\sqrt{5}\cdot n$ $\quad 0.12h-7.5k$

Trinomio: es un polinomio de tres términos. O también, la suma algebraica de tres monomios.

Ejemplos | $4x+7y-10z$ $\quad x^2+3x-1$ $\quad 3a^4b-4+b^3$ $\quad \frac{7x}{4}-28.51y-\sqrt[3]{2}$

Se denomina **grado de un polinomio** al mayor de los grados de los monomios que lo componen.

Ejemplos

Determinación del grado de polinomios:

a) $2x+3$: es de primer grado (el término de mayor grado es $2x$).

b) $3a^2+2a-$: es de segundo grado (el término de mayor grado es $3a^2$.

c) $1+3b-b^3+b^2$: es de tercer grado (el término de mayor grado es $-b^3$).

d) $m^2+2mn+n^2$: es de segundo grado (los 3 términos son de segundo grado).

e) $6x^3y+3x^2y^2-2xy+5$: es de cuarto grado.

El grado de un polinomio que contenga más de una variable también puede considerarse con respecto a una de ellas. Por ejemplo, en el inciso e) anterior el polinomio es de tercer grado con respecto a x, y de segundo grado con respecto a y.

Si bien hemos considerado un polinomio como una expresión algebraica que puede tener varias variables, resulta muy importante en el trabajo matemático, el caso especial de los **polinomios en una variable.**

Ejemplos

Polinomios en una variable son:

a) $7x^5-3x^4+2x^3-6x+4$ $\quad$ b) $3y^2-5y^7-9+6y$ $\quad$ c) $9-4z^2$

En **forma estándar**, un polinomio en una variable se escribe con potencias decrecientes de la variable. Así el ejemplo:

a) ya está en forma estándar y es de grado 5.

b) en forma estándar es: $-5y^7+3y^2+6y-9$; y es de grado 7.

c) en forma estándar es: $-4z^2+9$; y es de grado 2.

Para realizar algunas operaciones entre polinomios es necesario escribirlos en su forma estándar.

En general un **polinomio en x de grado n** es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde: $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ y n es un entero no negativo.

Un polinomio en x de grado n también puede escribirse en la notación funcional:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

La cual resulta muy práctica al momento de calcular el valor numérico del polinomio para un valor especifico de la variable x. Así, para evaluar o calcular el valor numérico de cuando $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x + 50$, cuando $x = -2$, escribimos: $p(-2) = 5(-2)^3 - 4(-2)^2 + 2(-2) + 50 = -40 - 16 - 4 + 50 = -10$.

Operaciones con polinomios de una y varias variables

En secundaria estudiaste las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y la división de polinomios sencillos. En este apartado vamos a repasar estos contenidos y vamos a profundizar en ellos; además, vas a ampliar el estudio de la división generalizándolo a la situación de dividir un polinomio por otro polinomio.

Términos semejantes. Reducción de términos semejantes

Si se tienen los términos: $2xy$; $-3a^2$; $\frac{1}{2}xy$; a^2. Observa que el primer y tercer término tienen la misma parte literal, igualmente sucede con el segundo y el cuarto término. A estos términos se les llama semejantes.

Dos o más términos son semejantes si tienen la misma parte literal.

Ejemplos

Términos semejantes:

$8m^2n$ y m^2n, también lo son, $-14x^3y$; $7yx^3$ y x^3y.

Escribe tres términos que sean semejantes a:

$3.17a^4b^2c$; ______ ; ______ ; ______

Para investigar cómo se puede realizar operaciones de reducción con los términos semejantes revisemos de nueva cuenta la definición de la suma de m veces el número natural o real a:

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{m \text{ veces}} = m \cdot a$$

Como se observa en esta definición lo que se esta haciendo aquí es reducir en un solo término una suma aritmética o algebraica de términos semejantes. Esto es evidente si se analizan las operaciones aritméticas siguientes donde se muestra la reducción particular de términos aritméticos semejantes, las cuales sirven de base empírica para hacer la generalización algebraica:

$6+6+6+6=4\times6$; $(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=4\times(-5)$; $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=4\times\frac{2}{3}$

estas tres operaciones se pueden generalizar en: $x+x+x+x=4x$.

O también:

$8^2+8^2+8^2+(6\times7)+(6\times7)+8^2+8^2=(3\times8^2)+2\times(6\times7)+(2\times8^2)=(5\times8^2)+2\times(6\times7)$; *que puede generalizarse (haciendo* $8=x$, $6=y$ y $7=z$) *como:* $x^2+x^2+x^2+yz+yz+x^2+x^2=3x^2+2yz+2x^2=5x^2+2yz$.

En resumen cuando los términos son semejantes pueden ser reducidos a un solo término.

Para reducir términos semejantes se halla la suma algebraica de sus coeficientes y se escribe la misma parte literal.

Ejemplos

a) Reduce términos semejantes en: $25ab-8ab+15ab$.

Resolución: como los términos de esta expresión son semejantes, entonces hallamos la suma algebraica de los coeficientes y mantenemos la parte literal:

$$25ab-8ab+15ab=(25-8+15)ab=32ab$$

b) Reduce términos semejantes en: $-18m^2n+10ab+3m^2n-17ab$.

Resolución: Señalaremos los términos que son semejantes de alguna manera, y efectuaremos la suma algebraica de sus coeficientes:

$$\underline{-18m^2n}+\underline{10ab}+\underline{3m^2n}-\underline{17ab}=(18+3)m^2n+(10-17)ab=-15m^2n-7ab$$

c) Reduce términos semejantes en: $2.5p^2q^3-1.8mp^2-1.3mp^2+3.8p^2q^3$.

Resolución: $\underline{2.5p^2q^3}-\underline{1.8mp^2}-\underline{1.3mp^2}+\underline{3.8p^2q^3}=6.3p^2q^3-3.1mp^2$.

d) Reduce términos semejantes en: $25x^3-6xy+51x^3-5xy+y^4$.

Resolución: $\underline{25x^3}-\underline{6xy}+\underline{51x^3}-\underline{5xy}+\underline{y^4}=(25+51)x^3+(-6-5)xy+y^4=76x^3-11xy+y^4$

Nota: Identificar y reducir términos semejantes es fundamental para realizar las operaciones con expresiones algebraicas.

Actividades de aprendizaje

A1) Escribe tres ejemplos de expresiones algebraicas:
- a) Irracionales:
- b) Racionales fraccionarias:
- c) Racionales polinomiales:

A2) Escribe tres ejemplos de polinomios:
- a) Monomios:
- b) Binomios:
- c) Trinomios:

A3) Escribe tres ejemplos de polinomios:
- a) De una variable:
- b) De dos variables:
- c) De tres variables:

A4) Escribe tres ejemplos de polinomios de una variable en su forma estándar.

____

____

____

A5) Determina el grado de los polinomios siguientes:

a) $2-c^2+c^4$ Grado:________

b) t^3-2t^2+2t-6 Grado:________

c) $5m-3m^2+4m^4-6$ Grado:________

d) $a^3+a^2-ab^3$ Grado:________

e) p^2q-2pq^3+3q-1 Grado:________

f) $x^5-6x^4y^3-4x^2y+x^2y^4-3y^6$ Grado:________

g) $2x^2yz+6xyz+2xyz^2+3x^2yz-5xyz-xyz^2$ Grado:________

A6) Dado el polinomio $p(x)=3x^5-4x^4+2x^3+8x^2-10x+7$, calcular:

a) $p(-1)-p(2)+[p(1)]^3$

b) $p(p(0))$

A7) Escribe tres ejemplos de términos semejantes:

a) Cuya parte literal tenga dos variables.

b) Cuya parte literal tenga tres variables.

c) Cuya parte literal tenga una variable.

A8) Reduce términos semejantes en:

a) $3b-5-8b+2+2b=$

b) $6.2x+3.9y+8.1y-2.7x-y=$

c) $9a^2-5a-a^2+8-3a^2-4a-2+a^2+a=$

d) $b^3+2b^2c-c^3+3bc^2+2b^3-6b^2c+2c^3=$

e) $\frac{2}{3}xy-\frac{1}{6}xy+\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{3}{4}xy+x^2y^2=$

f) $2ab^{-1}+5a^{-1}b+6a^{-2}b^{-3}+6ab^{-1}+3^{a-1}b=$

g) $m^2+n^2-mn+m^{-1}n^3+3mn+m^3n^{-1}-2m^2-n^2-m^{-1}n^3=$

h) $-2x^2yz+6xyz+2xyz^2+3x^2yz-5xyz-xyz^2=$

Suma (o adición) de polinomios

Si queremos sumar, o adicionar, los polinomios $2a+b$ y $7a-2b$, lo indicamos de la forma siguiente: $(2a+b)+(7a-2b)$ o simplemente $2a+b+(7a-2b)$, donde la utilización de los paréntesis indica que al polinomio $2a+b$ se le va a sumar el polinomio $7a-2b$.

Para encontrar el algoritmo y el resultado de la suma de polinomios anteriores, hay que recordar que dichos polinomios son expresiones algebraicas que adquieren un valor numérico cuando sus variables son sustituidas por números reales concretos. Por lo tanto, se le pueden aplicar las propiedades de campo de los números reales. De donde, aplicando las propiedades asociativa y conmutativa, y la reducción de términos semejantes, se obtiene qué:

$$(2a+b)+(7a-2b)=2a+(b+7a)+(-2b)=2a+(7a+b)+(-2b)$$
$$=(2a+7a)+(b+(-2b))=9a+(-b)=9a-b$$

El procedimiento formal anterior, aunque es correcto resulta impractico. Por esa razón para resolver esta operación se puede abreviar el procedimiento de la manera siguiente:

Para sumar polinomios se escriben uno a continuación del otro, conservando cada término su signo y reduciendo términos semejantes en caso de que existan.

Luego, podemos calcular directamente la suma anterior de esta otra manera:

$$(2a+b)+(7a-2b)=2a+b+7a-2b=(2+7)a+(1-2)b=9a-b$$

Otra forma práctica para calcular esta suma consiste en disponer los polinomios dados uno debajo del otro, de modo que los términos semejantes queden en columna. Así, en el caso anterior tendríamos:

$$\begin{array}{r} 2a+b \\ \underline{7a-2b} \\ 9a-b \end{array}$$

Ejemplos

a) $3b+c-4+(2b-3c+d-9)=3b+c-4+2b-3c+d-9$
$=5b-2c+d-13$

b) $x^3-5x^2+2x-6+(3x^2-4x+3)=?$

Resolución en forma de columna:

$$\begin{array}{r} x^3-5x^2+2x-6 \\ \underline{3x^2-4x+3} \\ x^3-2x^2-2x-3 \end{array}$$

c) $(2xy+3x)+(3xy+2y-x)+(-2xy+y)=?$

Resolución: $=2xy+3x+3xy+2y-x-2xy+y=3xy+2x+3y$

Resta (o sustracción) de polinomios

De la unidad anterior debes recordar que la operación de resta o sustracción de números reales se reduce a una adición, donde al minuendo se adiciona el opuesto del sustraendo, es decir, el sustraendo con su signo cambiado. Esto, por supuesto que también es aplicable a la resta de polinomios.

Para efectuar esta operación se procede pues de forma similar a la sustracción de números reales. Por tanto, si se quiere sustraer del polinomio $5x+2y$ el polinomio $3x-y$ podemos indicarlo y proceder como sigue: $(5x+2y)-(3x-y)=(5x+2y)+[-(3x-y)]=5x+2y-3x+y=2x+3y$.

Aquí la utilización de los paréntesis indica que se debe sustraer cada uno de los términos del polinomio $3x-y$ del polinomio $5x+2y$.

En forma práctica: Para sustraer un polinomio de otro se escribe el minuendo tal y como está, y a continuación el sustraendo cambiándole el signo a cada uno de sus términos; luego se reducen los términos que sean semejantes.

En el caso anterior tendríamos que:

$$(5x+2y)-(3x-y)=5x+2y-3x+y=2x+3y$$

Aquí también pueden disponerse los cálculos escribiendo el minuendo y debajo el sustraendo con sus signos cambiados; debes tener presente que los términos semejantes queden en columna para así facilitar la reducción.

$$\begin{array}{r} 5x+2y \\ \underline{-3x+y} \\ 2x+3y \end{array}$$

Ejemplos

a) De x^2-3x sustrae $-5x+6$

Resolución: $x^2-3x-(-5x+6)=x^2-3x+5x-6=x^2+2x-6$

b) De $4c^2d-7d^2$ sustrae $c^2d-5cd^2+3d^2$

Resolución: $4c^2d-7d^2-(c^2d-5cd^2+3d^2)=4c^2d-7d^2-c^2d+5cd^2-3d^2=3c^2d+5cd^2-10d^2$

c) De $-3m^2-5m+4$ sustrae $-m^2+2m-1$

Resolución:

$$\begin{array}{r} -3m^2-5m+4 \\ \underline{m^2-2m+1} \\ -2m^2-7m+5 \end{array}$$

Suma y resta combinada de polinomios

En muchos casos se presentan las operaciones de suma y resta combinadas en las cuales aparecen polinomios encerrados entre paréntesis que están precedidos por el signo "+" o por el signo "–". Por ejemplo:

$$7x^2+(-3xy-y^2)-(2x^2+xy-3y^2)$$

En estos casos se procede de acuerdo a los procedimientos ya establecidos para sumar y restar polinomios, los cuales se pueden resumir en la siguiente regla práctica que se aplica para eliminar estos paréntesis.

1) Todo paréntesis precedido por el signo "+" puede eliminarse dejando los términos del polinomio incluidos en él con sus propios signos.
2) Todo paréntesis precedido por el signo "–" puede eliminarse siempre que se cambie el signo a los términos del polinomio incluidos en él.

Luego en la práctica se calcula:

$$7x^2+(-3xy-y^2)-(2x^2+xy-3y^2)=7x^2-3xy-y^2-2x^2-xy+3y^2=5x^2-4xy+2y^2$$

Ejemplo

$(-5b^3c+2b^2)-(-3b^3c+5bc)+(6b^3c+5bc-b^2)=-5b^3c+2b^2+3b^3c-5bc+6b^3c+5bc-b^2=4b^3c+b^2$

Agrupación de términos en paréntesis

En muchas operaciones matemáticas (como en la factorización) a veces resulta conveniente asociar determinados términos de un polinomio utilizando paréntesis que estén precedidos, ya sea por el signo "+" o por el signo "–".

De los ejercicios anteriores de sumas y restas de polinomios se infiere inmediatamente que una regla práctica para proceder en estos casos es:

1) Si el paréntesis que se introduce está precedido por el signo "+", los términos que se incluyen en él conservan sus propios signos.
2) Si el paréntesis que se introduce está precedido por el signo "–" , se les cambia el signo a los términos que se incluyen en él.

Ejemplos

a) Dado el polinomio x^3-3x^2+2x-6. Encierra los dos últimos términos en un paréntesis que esté precedido por el signo "+".

Resolución: $x^3-3x^2+2x-6= x^3-3x^2+(2x-6)$

b) Dado el polinomio x^3-3x^2+2x-6. Encierra los dos últimos términos en un paréntesis que esté precedido por el signo "–".

Resolución: $x^3-3x^2+2x-6= x^3-3x^2-(-2x+6)$

c) Dado el polinomio $-5b^3c+2b^2-6bc+8c-20$. Encierra los dos primeros términos en un paréntesis precedido del signo "+" y los tres últimos términos en un paréntesis que esté precedido por el signo "–".

Resolución: $(-5b^3c+2b^2)-(6bc-8c+20)$

En la práctica, además de los paréntesis, suelen utilizarse ***otros signos de agrupación***: los corchetes [ ] y las llaves { }, que tienen el mismo significado que los paréntesis.

Luego, aunque este no sea el mejor uso que se le puede dar a los corchetes y llaves, podemos escribir:

$(7a - b)+ (2a + 3b) - (a - 5b)$ también como $(7a - b) + [2a + 3b] - \{a - 5b\}$.

Ahora bien, en ocasiones es necesario que expresiones que contengan paréntesis sean a su vez incluidas dentro de otros paréntesis. En estos casos, para evitar confusiones, es cuando se utilizan convenientemente los diferentes signos de agrupación.

Ejemplo | Si tenemos que sustraer de $3a$ la diferencia entre $2b$ y $a + b$ escribimos: $3a - [2b - (a + b)]$.

En general, hablamos de paréntesis (en sentido amplio) cuando nos estemos refiriendo a signos de agrupación. Las expresiones que contienen varios signos de agrupación, incluidos unos dentro de otros, decimos que poseen paréntesis superpuestos.

Ejemplo | En la expresión $2x - \{3y- [4x - (x- 2y)] - y\}$ aparecen paréntesis superpuestos.

Para ***simplificar expresiones*** de este tipo, los signos de agrupación pueden eliminarse sucesivamente aplicando las reglas ya conocidas para sumas y restas y teniendo en cuenta el orden siguiente:

Se comienza por los más interiores, es decir, "de adentro hacia afuera", o bien, se comienza por los más exteriores, es decir, "de afuera hacia adentro".

Ejemplos

Simplifica las expresiones algebraicas siguientes:

a) $2a^2 - [3a + (-4a^2 + 5a) - 3a^2] = 2a^2 - [3a - 4a^2 + 5a - 3a^2]$
$= 2a^2 - 3a + 4a^2 - 5a + 3a^2$ (eliminando paréntesis y corchetes)
$= 9a^2 + 8a$ (reduciendo términos semejantes)

b) $2x - \{3y + [4x - (x - 2y)] - y\}$
$= 2x - \{3y + [4x - x + 2y] - y\}$ (eliminando paréntesis)
$= 2x - \{3y + 4x - x + 2y - y\}$ (eliminando corchetes)
$= 2x - 3y - 4x + x - 2y + y$ (eliminando llaves)
$= -x - 4y$ (reduciendo términos semejantes)

Obsérvese que en los ejemplos anteriores se han eliminado los signos de agrupación "de adentro hacia afuera", que es el método que más se usa en la práctica.

Actividades de aprendizaje

A1) Suma los polinomios siguientes:

a) $x^2 - 3x$; $-2x^2 + 5x - 6$

b) $2x + 3x^2y - z^2$; $2z^3 + z^2 - 4x\,2y$

c) $-3mn - 2m^2 + 6$; $2mn + 5m^2 - 3$; $2m^2 - 8$

d) $2.5a^2 b - ab^2 - a - 5$; $a^2b - ab^2 - 4$; $-3a^2 b + 2a$

A2) Resta los polinomios siguientes:

a) $-x + 2y + 3z$ de $2x - 3y - 2z$

b) $6a^2b - 3ab^2 + a^3$ de $-2a^2b + 2a^3$

c) $2x^3 + 3x^2y - 4xy^2 + y^3$ de $x^2y + 2xy^2 - y^3$

d) $-2abc + 3a^2bc - 5ab^2c + 6abc^2$ de $ab^2c - 4a^2bc - 3abc^2$

A3) Realiza las siguientes operaciones y simplifica los resultados reduciendo términos semejantes:

a) $4rt - 5t^2 + (-rt + 3t^2 - t3)$

b) $(-5c^2 + 3) - (2c^2 - 3c + 4)$

c) $(3m^2 - 4mn + n^2) + (-8mn - 3n^2 + m^2)$

d) $-2pq^3 - 3p^3q^2 - (pq^3 + 2p^3q^2 - 4p^2q^3)$

e) $2p^2q + (5pq^2 - 3q^2 - p^2q) + 2pq^2 - (3pq^2 + q^2)$

f) $1.5m^2 + (-3.4m^2n + 6.7m^2) - (-4.3m^2n + 8.1n)$

g) $-4xy + (2x^2y - 3xy^2) - (-2xy - 8x^2y - 10xy^2) + 2x^2y$

h) $\frac{1}{2}a^2bc - \left(\frac{1}{8}\right)abc^2 - \left(\frac{2}{5}\right)ab^2c) + -\left(\frac{5}{6}\right)a^2bc + \left(\frac{1}{10}\right)ab^2c)$

i) $(-3m^2n + n^3) + (7m^2n + 2n^3 - mn^2)$

j) $(-3m^2n + n^3) - (7m^2n + 2n^3 - mn^2)$

A4) Sean: $p(x) - 7x^2$; $f(x) = x^2 + 5.4x$; $h(x) = 4x^2 - 6.4x$

a) Calcula $p(x) - [f(x) + h(x)]$

b) Calcula $p(3) - [f(-2) + h(1)]$

A5) Determina el polinomio que sumado con $2x^3y^2 + 5x^2y^3$ da como resultado $-5x^3y^2 + 9x^2y^3 - 3x^3y$.

A6) Para obtener como diferencia $-4x^2 - 7x + 5$, ¿qué polinomio debe sustraerse de $x^3 - 4x^2 + 5x - 4$?

A7) Introduce en un paréntesis precedido por el signo "+" el segundo y el tercer término de los polinomios:

a) $2x - 3y + z$

b) $2x^2 - 3xy - 4y^2 - 2a^3$

c) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

d) $3a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + 5$

A8) En cada uno de los polinomios del ejercicio anterior, introduce los dos últimos términos en un paréntesis precedido por el signo "–".

A9) Simplifica las expresiones siguientes:

a) $-(-2x^2 + a^2) - 3a^2 + [-3a^2 - (x^2 - a^2)]$

b) $3xy^2 - (3x^2y - x^3) + \{y^3 - (3xy^2 - 3x^2y - y^3) - x^3\}$

c) $6a - \{-2a + [3b - (a - b)]\}$

d) $8x^2y - \{4xy^2 - [2x^2y + (-5xy^2 - 3x^2y)]\}$

e) $5x^2y + [xy - (4x^2y - 1.2) + 4xy] + 2.8$

f) $4b^2 - \{3b - [5c - (-b^2 + 4c) + 2b] - c\}$

A10) Prueba que son válidas las igualdades siguientes:

a) $-(2r + 3t) - [-2r + (t - r)] = r - 4t$

b) $a - \{a - [-a - (-a - a)]\} = a$

Multiplicación de polinomios

Para calcular estos productos se utilizan las propiedades básicas de las operaciones, en especial la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición (sustracción).

$$a(b + c) = ab + ac \qquad a(b - c) = ab - ac$$

También se usan las siguientes propiedades de los exponentes:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (ab)^m = a^m b^m \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

las cuales son validas para a, b números reales, variables o expresiones algebraicas; y con m y n números enteros.

Ejemplo | $3x \cdot (x + 2y) = 3x \cdot x + 3x \cdot 2y = 3x^2 + 6xy$

Como puedes observar al multiplicar dos polinomios se obtiene un nuevo polinomio cuyos términos son los productos de cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

Si queremos calcular el producto de los polinomios $2a + b$ y $3a - 4b$, podemos indicarlo como aparece a continuación: $(2a + b)(3a - 4b)$. Para calcular esta operación, y en general para multiplicar dos polinomios cualesquiera, procedemos de la manera siguiente:

Se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y se reducen términos semejantes, en caso de que existan.

Luego, tendremos que:

$$\begin{aligned}(2a + b)(3a - 4b) &= 2a \cdot 3a - 2a \cdot 4b + b \cdot 3a - b \cdot 4b \\ &= 6a^2 - 8ab + 3ab - 4b^2 \\ &= 6a^2 - 5ab - 4b^2\end{aligned}$$

En la práctica, al calcular puede omitirse el primer paso (indicar los productos parciales) y escribir directamente estos productos ya calculados.

Ejemplos

a) $(a^2 + 3a^3)(2a^2 - 5a) = 2a^4 - 5a^3 + 6a^5 - 15a^4 = -13a^4 - 5a^3 + 6a^5$

Por lo general, se acostumbra a dar el resultado de modo que los términos del polinomio estén ordenados en potencias decrecientes (de mayor a menor exponente) de la variable que contenga, o de una de ellas si contiene más de una. Luego, en el caso anterior tendremos que la respuesta sería: $6a^5 - 13a^4 - 5a^3$.

También, en la práctica, suelen ordenarse los términos de los factores y así, el polinomio que resulta como producto, queda ya ordenado. Veamos:

$$(3a^3 + a^2)(2a^2 - 5a) = 6a5 + 15a^4 + 2a^4 - 5a^3 = 6a^5 - 13a^4 - 5a^3$$

b) Multiplicar: $(2x - 3)(x^2 - 5x + 2) = 2x^3 - 10x^2 + 4x - 3x^2 + 15x - 6 = 2x^3 - 13x^2 + 19x - 6$

Otra forma de disponer los cálculos es en columna:

$x^2 - 5x + 2$	
$2x - 3$	
$2x^3 - 10x^2 + 4x$	(producto de $2x$ por $x^2 - 5x + 2$)
$- 3x^2 + 15x - 6$	(producto de -3 por $x^2 - 5x + 2$)
$2x^3 - 13x^2 + 19x - 6$	(reduciendo términos semejantes)

En este caso, los términos semejantes se colocan en columna, lo que facilita su reducción. Además, es conveniente al disponer los polinomios para su multiplicación poner debajo el de menos términos, para facilitar la reducción de términos semejantes.

c) Realizar la multiplicación: $(2x^2 + 3y^2 - xy)(4xy + 3x^2 - y^2) = ?$

En casos como este, y en general, cuando los factores contengan muchos términos, resulta conveniente ordenar estos desde un principio para así facilitar los cálculos. Y la resolución en forma de columna quedaría como (aquí hemos ordenado ambos polinomios con respecto a las potencias de x):

$$\begin{array}{lr} & 2x^2 - xy + 3y^2 \\ & 3x^2 + 4xy - y^2 \\ \hline & 6x^4 - 3x^3y + 9x^2y^2 \qquad \leftarrow 3x^2(2x^2 - xy + 3y^2) \\ & 8x^3y - 4x^2y^2 + 12xy^3 \qquad \leftarrow 4xy(2x^2 - xy + 3y^2) \\ & -2x^2y^2 + xy^3 - 3y^4 \qquad \leftarrow -y^2(2x^2 - xy + 3y^2) \\ \hline & 6x^4 + 5x^3y + 3x^2y^2 + 13xy^3 - 3y^4 \end{array}$$

d) Realizar la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{l} a^4 - a^2 - 2a + 3 \\ a^3 - 2a + 1 \\ \hline a^7 - a^5 - 2a^4 + 3a^3 \\ -2a^5 \qquad + 2a^3 + 4a^2 - 6a \\ a^4 \qquad - a^2 - 2a + 3 \\ \hline a^7 - 3a^5 - a^4 + 5a^3 + 3a^2 - 8a + 3 \end{array}$$

Operaciones combinadas de suma, resta y multiplicación de polinomios

Si se tiene que $p(x) = x + 2$; $g(x) = x - 2$ y $h(x) = x^2 - 3x + 4$, entonces con estos polinomios se pueden realizar un número infinito de operaciones combinadas, tres de las cuales son:

$p(x) \cdot g(x) - h(x) = (x+2)(x-2) - (x^2 - 3x + 4) = x^2 - 2x + 2x - 4 - x^2 + 3x - 4 = -8 + 3x$

$[p(x)]^2 + h(x) = (x+2)(x+2) + (x^2 - 3x + 4) = x^2 + 2x + 2x + 4 + x^2 - 3x + 4 = 2x^2 + x + 8$

$g(x) \cdot h(x) - p(x) =$ ____________________

Actividades de aprendizaje

A1) Realiza las siguientes operaciones de polinomios:

a) $(3x^2 y)(-5xy^3 z) =$

b) $(8ab^3)(2a^5c)(10a^2bc^4) =$

c) $(2x^2y)(yx^3 - 4y^3 + 5x - 6) =$

d) $(x+5)(x-5) =$

e) $(x+3)(x-3) + (x-2)(x+2) - (x+6)(x-6) =$

f) $(x+a)(x-a) =$

g) $(x+a)(x^2 - 5a + 10) =$

h) $(x^2 + xy + y^2)(x - xy + y) =$

A2) Sean:

$A = 5x - y$; $B = x^2 - 3xy + 9y^2$; $C = 3y + x$

a) Calcula $A \cdot B - C$

b) Calcula $B \cdot C + A$

c) Calcula $A \cdot B \cdot C$

d) Calcula $A^2 - 3B - C^2$

A3) Demostrar mediante el algoritmo de la multiplicación de polinomios que los siguientes resultados son verdaderos:

a) $(x+a)(a+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
b) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
d) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
e) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
f) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
g) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
h) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
i) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
j) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

2.3 Productos notables

En la actividad de aprendizaje anterior se demostró la validez de los siguientes productos de polinomios:



Producto de dos binomios con un término común:
1. $(x+a)(a+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

Producto de dos binomios conjugados:
2. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Binomio al cuadrado o cuadrado de un binomio:
3. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Binomio al cubo:
5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Binomio a la cuarta / Binomio a la quinta:
7. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
8. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Estos productos se presentan tan frecuentemente en los cálculos algebraicos que se les ha dado el nombre especial de ***Productos Notables***. Resulta útil memorizarlos para así no tener necesidad de efectuar las multiplicaciones correspondientes repetidas veces, y en consecuencia, racionalizar el trabajo. De hecho, algunos de ellos ya los estudiaste en la secundaria

Si consideramos que en los productos notables las letras o variables pueden representar cualesquier número real, o incluso hasta expresiones algebraicas ya que estas finalmente también tienen valor numérico, entonces dichos productos pueden considerarse como ***modelos o fórmulas*** de aplicación general, validas para cualquier valor de sus variables donde las expresiones algebraicas involucradas tengan sentido matemático.

Productos notables básicos

Modelo general de productos de dos binomios que tienen un término común:
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b) x + ab$

Ejemplos

Productos de dos binomios que tienen un término común:

a) $(x + 4)(x + 3) = x^2 + (4 + 3)\, x + 4 \cdot 3 = x^2 + 7x + 12$

b) $(x + 7)(x - 5) = x^2 + [7 + (-5)]x + (7)(-5) = x^2 + 2x - 35$

c) $(x + 2)\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right) = x^2 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)\right]x + (2)\left(-\frac{1}{2}\right) = x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)x - 1$

d) $(x^2 - 3)(x^2 + 5) = (x^2)^2 + [(-3) + 5]x^2 + (-3)(5) = x^4 + 2x^2 - 15$

e) $[(3x + 2y) - 5][(3x + 2y) - 3]$

$= (3x + 2y)^2 + [(-5) + (-3)](3x + 2y) + (-5)(-3)$

$= (3x + 2y)^2 - 8(3x + 2y) + 15$

$= 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 15$

Modelo general de productos de dos binomios que tienen un término común:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplos

a) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

b) $(5x - 9)(5x + 9) = (5x)^2 - (9)^2 = 25x^2 - 81$

c) $(3x + 2y)(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$

d) $(3a^2 + 2b)(3a^2 - 2b) = (3a^2)^2 - (2b)^2 = 9a^4 - 4b^2$

e) $\left(ab^3 + \left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(ab^3 - \left(\frac{1}{2}\right)\right) = (ab^3)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = a^2b^6 - \left(\frac{1}{4}\right)$

Modelo general de binomios al cuadrado: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplos

a) $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(2) + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

b) $(x - 4)^2 = x^2 - 2(x)(4) + 4^2 = x^2 - 8x + 16$

c) $(6x - 5)^2 = (6x)^2 - 2(6x)(5) + 5^2 = 36x^2 - + 25$

d) $(7x^2 + 4y)^2 = (7x^2)^2 + 2(7x^2)(4y) + (4y)^2 = 49x^4 + 56x^2y + 16y^2$

e) $(5ab - 2c)^2 = (5ab)^2 - 2(5ab)(2c) + (2c)^2 = 25a^2b^2 - 20abc + 4c^2$

f) $\left(\frac{x}{3} + \frac{2y^2}{5}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{2y^2}{5}\right) + \left(\frac{2y^2}{5}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{4xy^2}{15} + \frac{4y^4}{25}$

Modelo general de binomios al cubo: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\quad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejemplos

a) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2(1) + 3x(1^2) + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2(2) + 3x(2^2) - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

c) $(3x + 2)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2\,(2) + 3(3x)(2)^2 + 2^3$
$= 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

d) $(2x^3 - y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(y) + 3(2)(y)^2$
$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - 7^3$

e) $(x^2 + y^3)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(y^3) + 3(x^2)(y^3)^2 + (y^3)^3$
$= x^6 + 3x^4y^3 + 3x^2y^2 + y^9$

f) $\left(\frac{ab}{2} - \frac{c}{3}\right)^3 = \left(\frac{ab}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{ab}{2}\right)^2\left(\frac{c}{3}\right) + 3\left(\frac{ab}{2}\right)\left(\frac{c}{3}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3$
$= \frac{a^3b^3}{8} - \frac{a^2b^2c}{4} + \frac{abc^2}{6} - \frac{c^3}{27}$

Teorema del binomio (Binomio de Newton)

El teorema del binomio también es un producto notable que proporciona un modelo o fórmula general para elevar un binomio a cualesquier exponente racional. Sin embargo, en este curso únicamente lo estudiaremos para el caso en que los exponentes del binomio son números naturales.

Para descubrir en qué consiste el teorema del binomio observa y analiza los siguientes casos particulares del mismo para diversos valores del exponente:

$n=1$: $(a + b)^1 = a + b$

$n=2$: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$n=3$: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$n=4$: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$n=5$: $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

¿Puedes observar alguna regularidad en los resultados anteriores? ¿Cuántos términos tienen cada resultado? ¿Quiénes son el primero y el último término de cada resultado? ¿Cómo varían en cada resultado los exponentes de las variables? ¿Cómo podrías calcular el coeficiente de un término a partir del término anterior? ¿Podrías calcular el coeficiente de un término a partir de los resultados del binomio anterior?

Con las respuestas encontradas para las preguntas anteriores, ¿podrías predecir o inferir cuales son los resultados de los binomios siguientes?

Cuando $n=6$: $(a + b)^6$ =

Cuando $n=7$: $(a + b)^7$ =

Cuando $n=n$: $(a + b)^n$ =

Consulta con tu maestro o maestra si el resultado que encontraste para $(a + b)^n$ es el correcto, si no es así corrígelo. Ahora, te podemos decir ¡¡felicidades!! Pues has redescubierto el famoso teorema de Newton, el cual te permitirá calcular "rápidamente" la potencia de un binomio cualquiera.

Aunque ya se tiene una fórmula o modelo para $(a + b)^n$, tal vez te resulte difícil de memorizarla, en razón de esto en la practica puede ser más conveniente resolver ejercicios y problemas aplicando directamente el modelo para el caso particular que se este resolviendo.

Ejemplo

a) Si se quiere calcular $(2x^3 - 4)^5 = ?$ Una forma fácil y práctica de resolverlo sería la siguiente: primeramente se plantea el modelo para el caso particular de $n=5$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

posteriormente se hacen en el modelo las sustituciones de a por $2x^3$ y b *por* -4

$[2x^3 + (-4)]^5 = (2x^3)^5 + 5(2x^3)^4 (-4) + 10 (2x^3)^3 (-4)^2 + 10(2x^3)^2 (-4)^3 + 5(2x^3)$ $(-4)^4 + (-4)^5$

y finalmente, se realizan las operaciones indicadas y las simplificaciones posibles

$(2x^3 - 4)^5 = 32x^{15} - 320x^{12} + 1280x^9 - 2560x^6 + 2560x^3 - 1024$

b) De igual manera:

$(2x + 5y)^4 = (2x)^4 = 4(2x)^3 (5y) + 6(2x)^2 (5y)^2 + 4(2x)(5y)^3 + (5y)^4$

$= 16x^4 + 160x^3y + 600x^2y^2 - 1000xy^3 + 625y^4$

Una pregunta que puede hacerse respecto al binomio de Newton es con relación al valor de un término específico.

Ejemplo

¿Cuál es el séptimo término de $(2x^3 - 4)^8$?

Para contestar esta pregunta observa el comportamiento de los términos en el caso general:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3} a^{n-3}b^3 + ... + nabn^{-1} + b^n$$

Observa como en el desarrollo de $(a + b)^n$ el exponente de b siempre es menor en uno que el número ordinal "$k+1$" correspondiente al orden del término en el desarrollo general del binomio, o sea, que para el ordinal $k+1=7$ (correspondiente al séptimo término) el exponente de b será el número cardinal 6 ($k=6$), mientras que el exponente de a será el cardinal "n-k" ya que la suma de los exponentes de a y b siempre es igual a "n". En tanto que el coeficiente de $a^{n-k}b^k$ es el cociente de $n(n - 1)(n - 2)... [n - (k - 1)]$ entre el factorial de k.

Por tanto, la fórmula para el $k + 1$ término (T_{k-1}) es:

$$T_{k-1} = \frac{n(n-1)(n-2)...\ n-(k-1)}{k!}(a^{n-k}b^k), \quad \text{o también,} \quad T_{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}(a^{n-k}b^k)$$

$= 458752x^6$

De donde, aplicando la primera fórmula, el séptimo término de $(2x^3 - 4)^8$ es:

$$T_7 = \frac{8(8-1)(8-2)...[8-(6-1)]}{6!}((2x^3)^{8-6}(-4)^6) = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{720}(2x^3)2\ (-4)6$$

De igual manera, aplicando la segunda fórmula, el cuarto termino de

$$T_4 = \frac{9!}{(9-3)!\cdot 9!}[(6x)^{9-3}(-y)^3] = -$$

Nota: Dominar los productos notables básicos será fundamental, en la siguiente unidad, para poder factorizar óptimamente ciertos polinomios.

Actividades de aprendizaje

A1) Aplica los productos notables para calcular:

a) $(y-3)(y+6)=$

b) $(3x-7)(3x+12)=$

c) $(6x^2y-1)(6x^2y+3)=$

d) $[(x+1)+2][(x+1)+8]=$

e) $[5(x+1)^2+2][5(x+1)^2+8]=$

f) $(2x+1)(2x-1)=$

g) $(8y^3-10)(8y^3+10)=$

h) $(x^4+\sqrt{2})(x^4-\sqrt{2})=$

i) $(x^5y^2-4^2)(x^5y^2+4^2)=$

j) $(0.6+w)(0.6-w)=$

k) $\left(\frac{2x}{3}+9\right)\left(\frac{2x}{3}-9\right)=$

l) $(5xy^3+2)^2=$

m) $(5xy^3-2)^2=$

n) $(12a^2b^3+1)^2=$

o) $[(x-3)^2+5]^2=$

p) $[(x+y)^2-7]^2=$

q) $(5xy^2+2)^3=$

r) $(5w-2v)^3=$

A2) Realiza las siguientes operaciones y simplifica los resultados:

a) $(x+y)^2+(x-y)^2=$

b) $(x+y)^2-(x-y)^2=$

c) $(x+y)^3-(x-y)^3=$

d) $(x+\Delta x)^3(x-\Delta x)=$

e) $(x+4)(x+1)^2(x-4)=$

f) $(x-5)^2-(x+2)(x-2)+(x+3)(x-8)=$

g) $(x^2+x+1)^2=$

A3) Verifica que:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\ ; \quad n,k\in\mathbb{R}+ \quad y\ k\leq n$$

A4) Aplica el binomio de Newton para hallar el resultado de la resta: $(x+\Delta x)^n-x^n=?$

A5) Desarrolla los siguientes binomios:

a) $(x^2+4)^5=$

b) $(4x^3-2y^2)^6=$

A6) Calcula el:

a) quinto término de $(2y-3x)^7$

b) octavo término de $(x^2+2y)^{10}$

A7) Aplica el binomio de Newton para calcular la potencia 1.03^4 milésimas.

2.4 División de polinomios

Para calcular las divisiones entre polinomios se utilizan las propiedades básicas de las operaciones y las siguientes propiedades de los exponentes:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad a^{-n} = \left(\frac{1}{a^n}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad a^0 = 1 \quad ; \quad a \text{ y } b \neq 0$$

las cuales son validas para a y b números reales, variables o expresiones algebraicas; con m y n números enteros.

Monomios entre monomios

Para efectuar el cociente de monomios dividimos los coeficientes y dividimos la parte literal.

Ejemplo

$$\frac{10a^3b^4c}{5a^2bc} = 2ab^3 \;\; ; \;\; ya\ que: \frac{10}{5} = 2 \;\; ; \;\; \frac{a^3}{a^2} = a \;\; ; \;\; \frac{b^4}{b} = b^3 \;\; ; \;\; \frac{c}{c} = 1$$

$$\frac{15m^2n^4}{-3m^2n^4p} = \frac{-5}{p} = -\frac{5}{p} \;\; ; \;\; ya\ qué: \frac{15}{-3} = -5 \;\; ; \;\; \frac{m^2}{m^2} = m^{2-2} = m^0 = 1 \;\; ; \;\; \frac{n^4}{n^4} = 1 \;;\; \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$$

Polinomios entre monomios

Para dividir un polinomio entre un monomio se aplica la definición de la división como multiplicación y la propiedad distributiva de la siguiente manera:

$$\frac{a+b-c}{d} = \frac{1}{d}(a+b-c) = \frac{1}{d}(a) + \frac{1}{d}(b) - \frac{1}{d}(c) = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$$

De donde se deduce la siguiente ***regla general:*** **Un polinomio se divide por un monomio, dividiendo cada término del polinomio por dicho monomio.**

Ejemplos

a) $(3ab + 12a - 15a^3) \div 3a = \frac{3ab}{3a} + \frac{12a}{3a} - \frac{15a^3}{3a} = b + 4 + 5a^2$

b) $\frac{63x^3 - 81xy + 27xy^2}{-9xy} = \frac{63x^3}{-9xy} - \frac{81xy}{-9xy} + \frac{27xy^2}{-9xy} = -\frac{7x^2}{y} + 9 - 3y$

c) $\frac{m^3n - 8m^4n^2 + m^2n - 4mn^3}{2m^2n} = \frac{m}{2} - 4m^2n + \frac{1}{2} - \frac{2n^2}{m}$

d) $\frac{2x^3 - 8x^2 - 10x + 20}{4x^2} = \frac{2x^2}{4x^2} - \frac{8x^2}{4x^2} - \frac{10x}{4x^2} + \frac{20}{4x^2} = \frac{x}{2} - 2x^0 - \frac{2.5}{x} + \frac{5}{x^2}$

$= 0.5x - 2 - 2.5x^{-1} + 5x^{-2}$

e) $\frac{4(a+b)^3 - 12(a+b)^2 + 6(a+b)}{2(a+b)} = 2(a+b)^2 - 6(a+b) + 3$

Polinomios entre polinomios

Si queremos dividir el polinomio $3x^2 + 2x - 8$ por $x + 2$, se puede indicar esta operación como sigue:

$$(3x^2 + 2x - 8) \div (x + 2) \qquad \text{o} \qquad \frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2}$$

Para dividir dos polinomios, la forma en que se disponen los cálculos se asemeja al procedimiento para dividir números enteros. Luego, en la práctica, para efectuar la división indicada anteriormente la escribimos al igual que si fueran números enteros y aplicamos el procedimiento que aparece a continuación.

Algoritmo o procedimiento para la división de polinomios:

1) El dividendo y el divisor deben ordenarse en potencias decrecientes de una misma variable.
2) Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente.
3) Este primer término del cociente se multiplica por el divisor y el producto resultante se sustrae del dividendo, de esta forma se obtiene el residuo.
4) Si este residuo es de mayor o igual grado que el divisor (atendiendo a la variable respecto a la cual se ordenaron los polinomios), lo consideramos como el nuevo dividendo y se repite así el proceso hasta obtener un residuo de menor grado que el divisor, el que será el residuo de la división.

Nota: Si el último residuo obtenido es cero, **la división es exacta**. En caso contrario, es **inexacta**.

En el caso particular planteado anteriormente, tendremos:

$$\begin{array}{lrl} & 3x - 4 & \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow \quad x + 2 & \overline{)\,3x^2 + 2x - 8} & \leftarrow \text{Dividendo} \\ & \underline{-3x^2 - 6x\quad\;\;} & \\ & -4x - 8 & \\ & \underline{4x + 8} & \\ & 0 & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Explicación:

1) El dividendo y el divisor están ordenados en potencias decrecientes de x.
2) Dividimos $3x^2 \div x = 3x$ (primer término del cociente).
3) Multiplicamos $3x\,(x + 2) = 3x^2 + 6x$ y sustraemos (para lo que cambiamos los signos a los términos) este producto del dividendo; el residuo obtenido es $-4x - 8$. El residuo obtenido es de igual grado que el divisor, por eso se continúa el proceso de la división.
4) Dividimos $-4x \div x = -4$ (segundo término del cociente).
5) Multiplicamos $-4\,(x + 2) = -4x - 8$ y sustraemos (cambiando los signos a los términos) este producto del nuevo dividendo. Se obtuvo un residuo de menor grado que el divisor, por lo que aquí termina la división. El cociente obtenido es $3x - 4$. Esta división es exacta ya que su residuo es cero.

Ejemplos

a) Dividir $(3a^2 - 8a - 3)$ *entre* $(3a - 2)$. Resolución: tanto el dividendo como el divisor están ordenados en potencias decrecientes de la variable a, luego podemos efectuar la división.

$$\begin{array}{r|l} & a - 2 \\ 3a - 2 & 3a^2 - 8a - 3 \\ & -3a^2 + 2a \\ \hline & \quad - 6a - 3 \\ & \quad\ \ 6a - 4 \\ \hline & \qquad -7 \end{array}$$

Al obtener -7 como residuo, la división termina, pues el grado de dicho residuo es menor que el grado del divisor. La división es inexacta.

Para comprobar: el producto del divisor por el cociente más el residuo debe ser igual al dividendo. $(3a - 2)(a - 2) + (-7) = 3a^2 - 6a - 2a + 4 - 7 = 3a^2 - 8a - 3$

b) Dividir $(2x^2 - 11y^2 + 3xy)$ *entre* $(x - 2y)$. Resolución: antes de efectuar la división, ordenamos el dividendo según potencias decrecientes de x y luego calculamos.

El residuo de la división es $3y^2$ ya que el grado de este residuo (con respecto a la variable x) es cero, es menor que el grado del divisor (que es 1).

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 7y \\ x - 2y & 2x^2 + 3xy - 11y^2 \\ & -2x^2 + 4xy \\ \hline & \qquad 7xy - 11y^2 \\ & \quad\ -7xy + 14y^2 \\ \hline & \qquad\qquad 3y^2 \end{array}$$

El residuo de la división es $3y^2$ ya que el grado de este residuo (con respecto a la variable x) es cero, es menor que el grado del divisor (que es 1)

Comprobación:

$$(x - 2y)(2x + 7y) + 3y^2 = (2x^2 + 7xy - 4yx - 14y^2) + 3y^2 = 2x^2 + 3xy - 11y^2$$

c) Dividir $(2b^3 - 4b - 2)$ *entre* $(2b + 2)$. **Resolución:** observa que en el polinomio dividendo falta el término correspondiente a b^2 (es decir $0 \cdot b^2$), luego al disponer los cálculos, dejamos en el dividendo el espacio correspondiente a este término.

$$\begin{array}{r|l} & b^2 - b - 1 \\ 2b + 2 & 2b^3 + 0b^2 - 4b - 2 \\ & -2b^3 - 2b^2 \\ \hline & \qquad -2b^2 - 4b \\ & \qquad\ \ 2b^2 + 2b \\ \hline & \qquad\qquad -2b - 2 \\ & \qquad\qquad\ \ 2b + 2 \\ \hline & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Comprobación:
$(2b + 2)(b^2 - b - 1) = 2b^3 - 2b^2 - 2b + 2b^2 - 2b - 2$
$= 2b^3 - 4b - 2$



d) Dividir $x^5 - 10x^3 + 19x^2 - 14x + 6$ entre $x^2 - 2x + 1$.

d) Dividir $x^5 - 10x^3 + 19x^2 - 14x + 6$ entre $x^2 - 2x + 1$.

Resolución:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 2x^2 - 7x + 3 \\
\hline
x^2 - 2x + 1 & x^5 + 0x^4 - 10x^3 + 19x^2 - 14x + 6 \\
 & -x^5 + 2x^4 - x^3 \\
\cline{2-2}
 & \quad 2x^4 - 11x^3 + 19x^2 \\
 & \quad -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad -7x^3 + 17x^2 - 14x \\
 & \qquad 7x^3 - 14x^2 + 7x \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 3x^2 - 7x + 6 \\
 & \qquad\qquad -3x^2 + 6x - 3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad -x + 3
\end{array}
$$

Nota: Realiza la comprobación de este ejemplo.

División sintética y propiedades de la división para polinomios

La división sintética es un método rápido que sirve para dividir un polinomio en x entre un binomio de la forma $x - a$. Para ilustrar sus ventajas primero resolveremos un ejercicio por el procedimiento convencional y despues mediante la división sintética.

Ejemplo

Dividir $p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ entre $(x + 1)$.

Solución por el método convencional:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 2 \\
\hline
x + 1 & x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\
 & -x^3 - x^2 \\
\cline{2-2}
 & 0 \quad + 2x^2 + 4x + 2 \\
 & \qquad -2x^2 - 2x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 0 \quad + 2x + 2 \\
 & \qquad\qquad -2x \ - 2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Solución por división sintética:

Coeficientes de $p(x)$ ↙

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & +3 & +4 & +2 & -1 = a \\
\downarrow & -1 & -2 & -2 & \\
\hline
1 & +2 & +2 & 0 = r &
\end{array}
$$

$\therefore$ *Cociente*: $c(x) = x^2 + 2x + 2$

residuo: $r = 0$

Algoritmo de la división sintética:

Paso 1: En la primera línea se escriben los coeficientes $a_n\ a_{n-1}\ z_{n-2} \dots a_1\ a_0$ del polinomio dividendo en orden decreciente de las potencias de x. Si falta alguna potencia de x, se escribe cero en el lugar que le corresponde. Al final de la línea se escribe el número "a" del divisor $x - a$.

Paso 2: Se escribe el coeficiente principal a_n del dividendo como primer término de la tercera línea.

Paso 3: Luego se multiplica *an* por "a" y el resultado se escribe como primer término de la segunda línea. Después se suma a_{n-1} con el producto $a_n \cdot a$ y el resultado $(a_{n-1} + a_n \cdot a)$ se escribe como segundo término en la tercera línea.

Paso 4: Luego se multiplica el segundo término de la tercera línea por "a" y el resultado se escribe como segundo término de la segunda línea. Después se suma a_{n-2} con el producto anterior y el resultado se escribe como tercer término en la tercera línea.

Paso 5: Se continua de esta manera hasta que se usa como sumando el último coeficiente del dividendo, o sea a_0. Y el resultado de esta suma se escribe como último término de la tercera línea.

Paso 6: Finalmente se obtiene el resultado con los números de la tercera línea: el último número de la tercera línea es el residuo, y los números anteriores a el son los coeficientes correspondientes a las potencias descendentes del cociente.

Ejemplo

Por división sintética dividir $p(x) = 3x^5 - 38x^3 + 5x^2 - 1$ entre $x - 4$.

Solución:

Coeficientes de $p(x)$ ↙

3	+0*	+38	+5	+0*	−1	$4 = a$
↓	−12	−48	−40	+180	+720	
3	+12	+10	+45	+180	$+719 = r$	*reciduo*

$\therefore$ *Cociente:* $c(x) = 3x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 45x + 180$

Nota importante: En ejercicios donde aparecen operaciones combinadas con polinomios, el orden a seguir es el ya establecido: operaciones dentro de los paréntesis, multiplicación y división en el orden en que aparecen y finalmente adición y sustracción en cualquier orden.

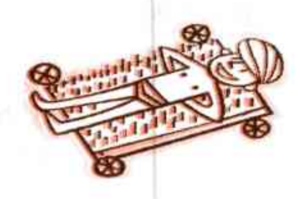
Los polinomios en x se denotan también mediante $p(x)$, $q(x)$, $c(x)$, $r(x)$, $f(x)$, y al igual que sucede con los números enteros también se cumple que si $c(x)$ es factor de $p(x)$, entonces $p(x)$ es divisible entre $c(x)$. Qué $p(x)$ sea divisible entre $c(x)$ implica que el residuo de esta división es igual a cero.

Ejemplo

Como $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$, entonces, $x^4 - 16$ es divisible entre $(x^2 + 4)$, $(x^2 - 4)$, $(x + 2)$ y $(x - 2)$. Además, se puede verificar que el polinomio $x^4 - 16$ no es divisible entre $x^2 - 2x - 3$. O sea, que el residuo que resulta de esta última división es diferente de cero.

En uno de los ejemplos resueltos de divisiones determinamos que:

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 7y \\ \hline x - 2y & 2x^2 + 3xy - 11y^2 \\ & -2x^2 + 4xy \\ \hline & \quad 7xy - 11y^2 \\ & \quad -7xy + 14y^2 \\ \hline & \qquad 3y^2 \end{array}$$



Además, se hizo la comprobación mediante el procedimiento del producto del divisor por el cociente más el residuo debe ser igual al dividendo.

$$(x - 2y)(2x + 7y) + 3y^2 = (2x^2 + 7xy^2 - 4yx^2 - 14y^2) + 3y^2 = 2x^2 + 3xy - 11y^2$$

Este procedimiento de comprobación, al igual que para números enteros, se puede generalizar en el ***algoritmo de la división para polinomios* en una variable**:

Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x, tales que $q(x) \neq 0$, y el grado de $q(x)$ es menor o igual que el grado de $p(x)$, entonces existen polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que:

$p(x)$	$=$	$q(x)$	$c(x)$	$+$	$r(x)$
↑		↑	↑		↑
Dividendo		Divisor	Cociente		Residuo o Resto

en donde: el grado de $r(x)$ es cero o menor que el grado de $q(x)$.

En particular, cuando dividimos un polinomio $p(x)$ de grado n, por un binomio de la forma $q(x)= x - a$ (de grado 1), se cumple que:

$$p(x) = (x - a)\, c(x) + r(x)$$

Siendo el cociente $c(x)$ de grado n–1 y el residuo $r(x)$ un número (de grado cero).

Si $p(x)$ no es divisible por $q(x)= x - a$, entonces $p(x)= (x - a)\, c(x)+ r(x)$, y en consecuencia $p(a) = (a - a)\, c(a) + r(a)= r(a)$. O sea, que para conocer el residuo que resulta de dividir $p(x)$ entre $x - a$, basta evaluar el polinomio en $x = a$, ya qué, $p(a) = r(a)$. Esto se conoce como ***Teorema del residuo***, y se enuncia como:

Si $P(x)$ se divide entre $x - a$, entonces $P(a)$ es el residuo de tal división, o sea $P(a)= r(a)$.

¿Es divisible $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 120$ entre $q(x) = x + 4$? **Resolución:** para contestar esta pregunta primero reescribimos $q(x) = x + 4 = x - (-4)$, después calculamos $p(-4) = 2(-4)^3 - 5(-4)^2 + (-4) + 120 = -92$. Por tanto, $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 120$ ***no es divisible*** entre $q(x) = x + 4$, ya qué el residuo $r(-4) = p(-4) = -92 \neq 0$. De donde, por el algoritmo de la división existe $c(x)$ tal que: $2x^3 - 5x^2 + x + 120 = (x + 4) \cdot c(x) + (-92)$. ¿Cómo puedes encontrar $c(x)$?

Cuando $p(x)$ es divisible entre $q(x) = x - a$ se tiene que la división es exacta y $r(x) = 0$, en consecuencia un polinomio $p(x)$ es divisible por un binomio de la forma $x - a$, si se puede expresar como:

$$p(x) = (x - a)\, c(x) \;\Rightarrow\; p(a) = (a - a)\, c(a)= 0$$

Luego si $p(a)$=0, entonces $p(x)$ es divisible por un binomio de la forma $x - a$, o $x - a$ es un factor de $p(x)$. Esto se conoce como ***Teorema del factor***, el cual se puede enunciar como:

Si $p(a)$= 0, entonces, $x - a$ es factor de $p(x)$ o $p(x)$ es divisible entre x–a.
Nota: los valores de $x = a$ para los cuales $p(a)$=0, se llaman ceros de $p(x)$ o raíces de la ecuación $p(x)$= 0.

Ejemplos

a) Determinar si $(x - 2)$ es factor de $p(x) = x^3 - 7x + 6$.
Solución: como $p(2) = (2)^3 - 7(2) + 6 = 0$, entonces $p(x)$ es divisible entre $(x - 2)$, o $(x - 2)$ es un factor de $p(x)$. Es decir, $(x^3 - 7x + 6) \div (x - 2)$ es exacta, y el residuo es cero. Esto significa que existe un polinomio de segundo grado $c(x)$ tal que: $p(x) = (x - 2) \cdot c(x)$. En este caso también se dice que $x = 2$ es un cero de $p(x)$, pues $p(2) = 0$. Del ejemplo anterior se infiere que la división de polinomios es muy valiosa para factorizar y encontrar los ceros de funciones polinomiales $p(x)$.

b) Demostrar que $(x - 1)$ es factor de $p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.
Solución: como $p(-1) = (-1)3 + 3(-1)2 + 4(-1) + 2 = -1 + 3 - 4 + 2 = 0$, entonces, de acuerdo con el teorema del factor, $(x + 1)$ es factor de $p(x)$. Otro método de resolverlo sería dividir $p(x)$ entre $(x -1)$ y demostrar que el residuo es 0. El cociente de la división sería otro factor de $p(x)$.

c) Encontrar un polinomio $p(x)$ de grado 3, que tenga los ceros 2, – 1 y 4.
Solución: de acuerdo con el teorema del factor, $p(x)$ tiene los factores $(x - 2)$, $(x + 1)$ y $(x - 4)$. Así, $p(x) = a(x - 2)(x + 1)(x - 4)$, donde a puede ser cualquier valor distinto de cero. En particular si a=1, y se realiza la multiplicación, se obtiene:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 2)(x + 1)(x - 4) = (x - 2)(x^2 - 3x - 4) \\ &= x^3 - 3x^2 - 4x - 2x^2 + 6x + 8 = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \end{aligned}$$

Actividades de aprendizaje

A1) Efectúa las divisiones siguientes:

a) $(16x^2y^5) \div (8xy^2) =$

b) $(25a^5b^2c^3) \div (10a^4b^3c^3) =$

i) $(28c^2 - 30d^2 - 11cd)(4c - 5d)^{-1} =$

c) $(4x^2y^6 - 8y^3x^4 + 24x^3y^2) \div (-4x^2y^3) =$

j) $\dfrac{a^3 - 4a^2 - 3a + 8}{a - 2} =$

d) $\dfrac{a + ab - b}{b} =$

k) $\dfrac{4c^3 - 10c^5 + 3c^4}{-5c^2 + 4c} =$

e) $(a - b)(b - a)^{-1} =$

l) $\dfrac{5x^4 - 2x + 2 - 3x^3}{x^2 - x - 1} =$

f) $(6c^2 + 7c + 2) \div (3c + 2) =$

g) $(2a^2 + 4ab + 2b^2) \div (a + b) =$

h) $(-4x^2 + 6x - 2)(-2x + 2)^{-1} =$

A2) Efectúa las operaciones siguientes:

a) $\dfrac{x - 9}{x - 3} + (x - 1)^2 - 4(x + 5) =$

b) $(x + 2) - \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} =$

c) $(12x^4 + 11x^2y^2 - 5y^4)(3x^6 - y^6) =$

d) $\dfrac{a^2 - 3a - 4}{a - 1} =$

A3) Prueba que las igualdades siguientes se cumplen:

a) $(9m^2 + 6m + 1) \div (3m + 1) - 1 = 3m$

b) $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 6}{x^2 - 3} - 4(x - 0.5) = x^2 - 4x$

A4) Simplifica la expresión y calcula su valor numérico para el valor de la variable que se indica:

$\dfrac{x^2 - 11x + 24}{x - 3} + 2x$ para $x = \dfrac{2}{3}$

A5) Mediante la división sintética determinar el cociente y el residuo de dividir el polinomio:

a) $x^3 - 3x^2 - 2x - 3$ *entre* $x - 1$

b) $2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ *entre* $x + 3$

c) $3x^4 - 10x^2 - 1$ *entre* $x - 2$

d) $x^5 - 5x^3 - 9x$ *entre* $x + 4$

A6) Sin efectuar la división, calcular el residuo si se divide:

a) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ *entre* $q(x) = x - 3$.

b) $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 2x - 6$ *entre* $q(x) = x + 2$.

A7) Use el teorema del factor, para demostrar que:

a) $x - 8$ es factor (o divisor) de $p(x) = x^2 - 13x + 40$.

b) $x + 2$ es factor (o divisor) de $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$.

A8) a) Encontrar un polinomio $p(x)$ de grado 2, que tenga los ceros 3 y 5.

b) Encontrar un polinomio $p(x)$ de grado 3, que tenga los ceros 2, 0 y 5.

A9) Use la división sintética para demostrar que $a = -2$ es un cero de $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 10x + 4$.

A10) Demuestre que $x - a$ no es factor, o divisor, de $p(x) = x^4 + 5x^2 + 2$ para algún número real "a".

3 Factorización y fracciones algebraicas



Proposito de la unidad

Comprende y realiza las operaciones de factorización de polinomios y de las fracciones algébricas, y las aplica en la formulación y resolución de problemas en diversos contextos.

Contenido

- **Factorización de polinomios:** Factorización por extracción de un factor común (monomio y/o polinomio). Factorización de binomios que son: diferencia de cuadrados, suma y resta de cubos. Factorización de trinomios: cuadrados perfectos, con un término cuadrático e irregular. Factorización completando un trinomio cuadrado perfecto. Factorización por agrupación.

- **Aplicaciones de la factorización:** Resolución de ecuaciones polinomiales por factorización inmediatas. Simplificación de fracciones algebraicas.

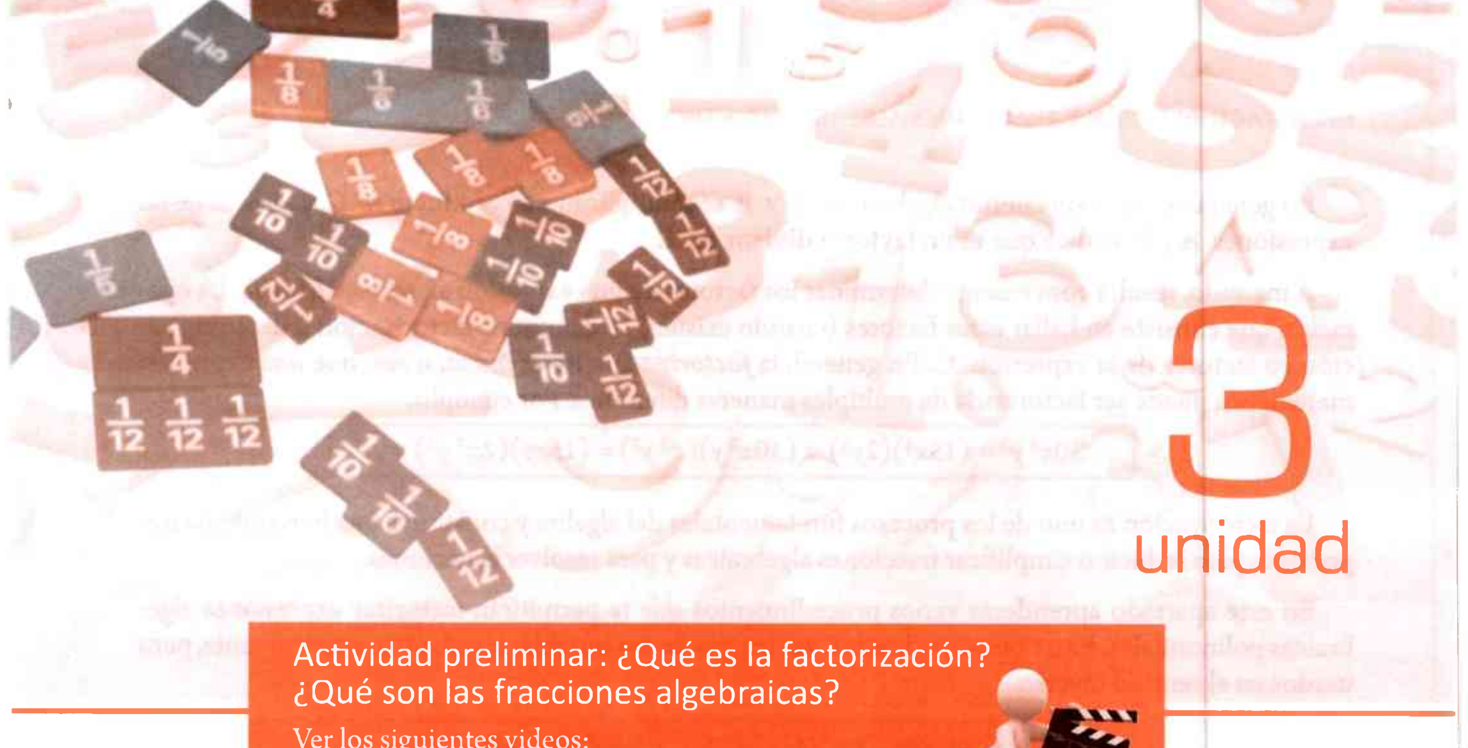
- **Fracciones algebraicas**: Multiplicación y división de fracciones algebraicas. Adición y sustracción de fracciones algebraicas. Ejercicios combinados y fracciones complejas.

Indicadores de desempeño

En esta unidad debe lograrse que los alumnos sean capaces de:

1) Desarrollar habilidades en la identificación y factorización de polinomios, siempre que sea posible realizarlo por aplicación de los procedimientos elementales estudiados; así como descomponer en factores expresiones polinomiales donde aparezcan combinaciones de los casos tratados.
2) Reconocer que las reglas de cálculo con fracciones algebraicas constituyen una generalización de las reglas de cálculo con números racionales considerados como cocientes de números enteros.
3) Desarrollar habilidades en la realización de las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división con fracciones algebraicas simples y complejas, y en la simplificación o reducción de sus resultados.





Actividad preliminar: ¿Qué es la factorización? ¿Qué son las fracciones algebraicas?

Ver los siguientes videos:
https://www.youtube.com/watch?v=ROGt8u81FxM
https://www.youtube.com/watch?v=mLflDFKp_sY



3.1 Factorización de polinomios

Completa la siguiente tabla de multiplicación de polinomios.

Multiplicación

$(2)(3)(\quad)$	=	30
$(\qquad)(-6x^3y^4)$	=	$-30x^5y^7$
$a(\quad + b + 1)$	=	$a^2 + ab + a$
$(a + b)(a + b)$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
$(x + y)(\qquad)$	=	$x^2 - y^2$

Factorización

De la tabla anterior a los polinomios que se han multiplicados se les llama factores o divisores del resultado (o producto) de la multiplicación. Así tenemos que:

- 2 , 3 y 5 son factores o divisores de 30
- $5x^2y^3$ y $-6x^3y^4$ son factores o divisores de $-30x^5y^7$
- a y (a + b + 1) son factores o divisores de $a^2 + ab + a$
- $(x + y)$ y $(x - y)$ son factores o divisores de $x^2 - y^2$
- $(a + b)$ y $(a + b)$ son factores o divisores de $a^2 + 2ab + b^2$

Del mismo modo, como $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$; luego $(x + 2)$ y $(x - 2)$ son factores o divisores de $x^2 - 4$.

En general, si dos expresiones algebraicas A y B se multiplican y su producto es C, cada una de las expresiones A y B se dice que es un **factor** o **divisor** de C.

A menudo, resulta conveniente determinar los factores de una expresión algebraica dada C. La operación que consiste en hallar estos factores (cuando existen) se denomina factorización o descomposición en factores de la expresión C. En general, la ***factorización no es única***, o sea, que una expresión matemática puede ser factorizada de múltiples maneras diferentes. Por ejemplo:

$$30x^4 y^3 = (15x^4)(2y^3) = (30x^2 y)(x^2 y^2) = (15xy)(2x^3 y^2) = \ldots$$

La factorización es uno de los procesos fundamentales del álgebra y constituye una herramienta importante para reducir o simplificar fracciones algebraicas y para resolver ecuaciones.

En este apartado aprenderás varios procedimientos que te permitirán factorizar expresiones algebraicas polinomiales. Entre otros, podrás utilizar los productos notables estudiados anteriormente, pero usados en el sentido inverso.

Productos Notables	$\Leftrightarrow$	Factorizaciones
$(x+a)(a+b)$	$\Leftrightarrow$	$x^2 + (a+b)x + ab$
$(a+b)(a-b)$	$\Leftrightarrow$	$a^2 - b^2$
$(a+b)^2$	$\Leftrightarrow$	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2$	$\Leftrightarrow$	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$\Leftrightarrow$	$a^3 + b^3$
$(a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$\Leftrightarrow$	$a^3 - b^3$

Factorización de polinomios por factor común

De la propiedad distributiva de los números reales se tiene que: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Por tanto, por la propiedad simétrica de la igualdad, la factorización de $a \cdot b + a \cdot c$, nos queda como:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

En este caso se dice que se ha extraído el **factor común** a en la expresión $a \cdot b + a \cdot c$, ya que dicho factor aparece en cada uno de los sumandos o términos de la expresión dada. En general:

Si en una expresión algebraica dada existe un factor que sea común a todos sus términos, esta puede descomponerse en el producto de dicho factor común por el polinomio que resulta al dividir cada uno de los términos de la expresión dada por ese factor común.

Ejemplos

a) $x^2 + 3x = x\left(\frac{x^2 + 3x}{x}\right) = x \cdot (x + 3)$ o $x^2 + 3x = x \cdot x + 3x = x \cdot (x + 3)$

b) $4a - 6 = 2 \times 2a - 2 \times 3 = 2\,(2a - 3)$

c) $6\,m^2n - 9\,mn^2 + 3\,mn = (3mn)(2m) - (3mn)(3n) - (3mn)(1) = (3mn)(2m - 3n - 1)$

d) $x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y)$ (el factor común es el binomio $(a + b)$)

e) $10\,a^5 - 8\,a^4 x + 4\,a^3 x^2 - 2\,a^2 x^3 = (2a^2)(5a^3) - (2a^2)(4a^2 x) + (2a^2)(2ax^2) - (2a^2)(x3)$
$= (2a^2)(5a^3 - 4a^2 x + 2ax^2 - x^3)$

f) $(x - a)(y + 2) + b(y + 2) = (y + 2)(x - a + b)$

g) $2m(n + 3) + n + 3 = 2m(n + 3) + (n + 3)(1) = (n + 3)(2m + 1)$

Actividades de aprendizaje

A1) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $b^2 - 2b =$

b) $5y^2 + 15y^3 =$

c) $p^2 + 5pq =$

d) $7m^3n^2 + 14m^2n^3 - 21m^3n^4 =$

e) $\frac{1}{2}b^2y^2 - \frac{1}{2}b^3yz =$

f) $\frac{4}{5}r^2s^2t^2 - \frac{2}{5}r^4s^3t + \frac{6}{5}r^3s^2t^3 =$

g) $(c+d)^2 - 2(c+d) =$

h) $b(w-1) + w - 1 =$

i) $x(a-b) + y(a-b) - a + b =$

j) $8xy^3 - 4x^2y^2 + 4y =$

Factorización de binomios que son diferencia de dos cuadrados

Entre los productos notables estudiados, pudiste verificar que la suma de dos términos multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Utilizando este producto notable, podemos obtener un procedimiento para descomponer en factores una diferencia de dos cuadrados.

Por lo tanto la diferencia de dos cuadrados se descompone en el producto de la suma por la diferencia de las bases de estos cuadrados.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejemplos

Factorizar los siguientes polinomios, que son diferencias de cuadrados:

a) $9x^2 - 25 = (3x)^2 - (5)^2 = (3x+5)(3x-5)$

b) $\frac{1}{4} - 0.49y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (0.7y)^2 = \left(\frac{1}{2} + 0.7y\right)\left(\frac{1}{2} - 0.7y\right)$

c) $a^4 - 16b^4 = (a^2 + 4b^2)(a^2 - 4b^2)$

Observa que el factor $(a^2 - 4b^2)$ es, a su vez, una diferencia de cuadrados; luego repetimos el procedimiento. Resulta entonces:

$$a^4 - 16b^4 = (a^2 + 4b^2)(a^2 - 4b^2) = (a^2 + 4b^2)(a + 2b)(a - 2b)$$

que es su factorización completa. En general, cuando se factoriza una expresión algebraica se debe continuar hasta que los factores tengan la forma más simple posible, de modo que no se pueda aplicar ninguno de los casos de factorización estudiados.

d) $3 - 12x^2 = 3(1 - 4x^2) = 3(1+2x)(1-2x)$

(Primero se factorizó sacando factor común).

e) $2a^3 - 18a = (2a)(a^2) - (2a)(9) = 2a(a^2 - 9) = 2a(a+3)(a-3)$

f) $16a^4 - 81 = (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) = (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$

g) $(x+2)^2 - y^2 = [(x+2) + y][(x + 2 + y)(x + 2 - y)] = (x + y + 2)(x - y + 2)$

Factorización de Binomios que son sumas o diferencias de dos cubos

También de los productos notables, se observa que:

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplos

a) $a^3 - 125 = (a)^3 - (5)^3 = (a - 5)(a^2 + 5a + 25)$

b) $(1 - b^3) = (1 - b)(1 + b + b^2)$

c) $64\,a^3 + 729 = (4a)^3 + 9^3 = (4a + 9)(16a^2 - 36a + 81)$

d) $x^{3n} + y^{3n} = (x^n)^3 + (y^n)^3 = (x^n + y^n)(x^{2n} - x^n y^n + y^{2n})$

e) $3x^3 + 192 = 3(x^3 + 64) = 3(x^3 + 4^3) = 3(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

f) $m^3 - \frac{y^3}{8} = m^3 - \left(\frac{y}{2}\right)^3 = \left(m - \frac{y}{2}\right)\left(m^2 + \frac{my}{2} + \frac{y^2}{4}\right)$

Actividades de aprendizaje

A1) Factoriza los siguientes binomios:

a) $m^2 - 81 =$

b) $a^2 + 4a =$

c) $100x - x^3 =$

d) $\frac{16}{9} - 0.36\,y^4 =$

e) $\frac{1}{36}\,w^2 - v^8 =$

f) $36 - 0.81b^2 =$

g) $(x - y)^2 - 25(a + b)^2 =$

h) $49x - 64\,xy^{2n} =$

i) $x^3 - 27 =$

j) $y^3 + \frac{1}{8} =$

k) $8a^3 - 27b^3$

l) $x^6 + y^9 =$

m) $27a^6 + 343b^{12} =$

n) $216x^6 - 125y^3$

A2) Verifica que: $(x - y)^3 - (x + y)^3 = (-2y)(3x^2 + y^2)$

Factorización de Trinomios que son cuadrados perfectos

Como habrás podido observar, al desarrollar el cuadrado de un binomio de obtiene siempre un trinomio, al que se le denomina trinomio cuadrado perfecto.

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (Trinomio Cuadrado Perfecto)

Ejemplo

$x^2 + 10x + 25$ es un binomio cuadrado perfecto ya que:

$(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 10x + 25$

Por lo tanto, todo trinomio que sea cuadrado perfecto se puede transformar por factorización en el cuadrado de un binomio.

Un trinomio es cuadrado perfecto cuando:

- Dos de sus términos son cuadrados perfectos, y
- El término restante es igual al doble del producto de las raíces cuadradas de dichos términos, o al opuesto de dicho producto.

Nota: Para reconocer términos cuadrados perfectos, busca coeficientes que sean cuadrados de enteros y variables elevadas a potencias pares.

En resumen:

$a^2 + 2\,ab + b^2 = (a + b)^2$



$a^2 - 2\,ab + b^2 = (a - b)^2$

$a^2 \pm 2\,ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Ejemplos

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $x^2 + 8x + 16 = (x)^2 + 2(x)(4) + (4)^2 = (x + 4)^2$

b) $9a^2 - 6ab + b^2 = (3a)^2 - 2(3a)(b) + (b)^2 = (3a - b)^2$

c) $4m^4 + 25n^2 + 20m^2n = 4\,m^4 + 20\,m^2n + 25\,n^2$

$= (2m^2)^2 + 2(2m^2)(5n) + (5n)^2 = (2m^2 + 5n)^2$

d) $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4 = 1^2 - 2\,(1)(\,8\,a\,x^2) + (8ax^2)^2 = (1 - 8ax^2)^2$

e) $x^5 - 10x^3 + 25x = x(x^4 - 10x^2 + 25) = x[(x^2)^2 - 2(x^2)(5) + (5)^2] = x\,(x^2 - 5)^2$

f) $\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{5} + \frac{y^2}{25} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{5}\right) + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^2$

Factorización de Trinomios que son de la forma: $x^2 + p\,x + q$

Entre los productos notables aprendiste a calcular el producto de dos binomios que tienen un término común: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Ejemplo | $(x + 8)(x + 2) = x^2 + 8x + 2x + (8)(2) = x^2 + (8 + 2)x + (8)(2) = x^2 + 10x + 16$

Observa que al efectuarse este producto se obtiene un trinomio que tiene la forma $x^2 + px + q$, donde $p = a + b = 8 + 2 = 10$ y $q = ab = (8)(2) = 16$.

Por lo tanto:

Un trinomio de la forma $x^2 + px + q$ se puede descomponer en el producto de dos factores $(x + a)$ y $(x + b)$ siempre que podamos encontrar dos números $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ cuya suma algebraica sea a+b= $\boldsymbol{p}$ y cuyo producto sea $ab = \boldsymbol{q}$, y se tiene entonces:

$$x^2 + px + q = (x + a)(x + a)$$

Ejemplos

a) $x^2 + 9x + 20 = ?$
Resolución: hay que buscar dos números cuya suma sea 9 y cuyo producto sea 20, se analizan los divisores de 20, estos son: 4 y 5.

$$\therefore x^2 + 9x + 20 = (x + 5)(x + 4)$$

b) $a^2 - 8a + 12 = ?$
Resolución: determinar dos números cuya suma sea – 8 y cuyo producto sea 12 (ambos deben tener igual signo, ¿por qué?), estos son: – 6 y –2.

$$\therefore a^2 - 8a + 12 = (a - 6)(a - 2)$$

c) $b^2 + 3b - 28 = ?$
Resolución: hallar dos números cuya suma sea 3 y cuyo producto sea – 28 (como el producto es negativo ambos deben tener signos diferentes), estos son: 7 y – 4, (– 7 y 4 no sirven porque la suma es – 3).

$$\therefore b^2 + 3b - 28 = (b + 7)(b - 4)$$

d) $x^2 - 7xy + 10y2 = ?$
Resolución: escrito en la forma $x^2 - (7y)x + 10y^2$ se trata de hallar dos monomios cuyo producto sea $10y^2$ y cuya suma sea $-7y$, estos son: $-5y$, $-2y$.

$$\therefore x^2 - 7xy + 10y^2 = (x - 2y)(x - 5y)$$

e) $m^4 - 36 - 5m^2 = ?$
Resolución: este trinomio no está dado directamente de la forma $x^2 + px + q$, pero con un cambio de orden en los términos se puede reducir a ella.

$$\therefore m^4 - 5m^2 - 36 = (m^2 - 9)(m^2 + 4) = (m + 3)(m - 3)(m^2 + 4)$$

f) $x^2 - 4x - 6 = ?$ Este trinomio es **imposible de factorizar** de acuerdo con los procedimientos hasta ahora empleados (¿Por qué?)

Factorización por tanteo de trinomios de la forma: $mx^2 + px + q$, con m ≠ 1.

De la multiplicación de polinomios se sabe que: $(5x + 3)(x + 2) = 5x^2 + 10x + 3x + 6 = 5x^2 + 13x + 6$

Como puedes observar, el trinomio $5x^2 + 13x + 6$ es de la forma $mx^2 + px + q$, con $m = 5$, $p = 13$ y $q = 6$. En este caso, los coeficientes m, p y q se obtienen de la manera siguiente:

$m = 5 = (5)(1)$ (producto de los coeficientes de x)

$q = 6 = (3)(2)$ (producto de los términos independientes)

$p = 13 = (5)(2) + (3)(1)$

En general $\quad (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd = mx^2 + px + q$

donde: $m = ac$, $\quad p = ad + bc \quad$ y $\quad q = bd$.

Por lo tanto, $mx^2 + px + q$ será factorizable siempre que sea posible determinar los números a, b, c y d tales que $m = ac$, $p = ad + bc$ y $q = bd$. Para determinar estos números se aplica el siguiente procedimiento:

Paso 1. Se ensaya una descomposición factorial para $m = ac$ y $q = bd$.
Paso 2. Se calculan los productos ad y bc y se suman, si $ad + bc = p$, entonces los factores son los números buscados. En caso contrario, debe ensayarse con otra combinación de factores para m y q.

$$m\,x^2 + p\,x + q = (ax + b)(cx + d)$$

m, q; $p = ad + bc$

Ejemplos

Factorizar por tanteos los trinomios siguientes:

a) $2a^2 + 11a + 12 = ?$
Resolución: en este ejemplo m=2=ac, p=11=ad+bc y q=12=bd. Primer paso, ensayemos las factorizaciones m=2=(2)(1) y q=12=(3)(4). Segundo paso, calculamos la suma p=ad+bc=(2)(4)+(3)(1)=11. Como p=11, se concluye:

$$\therefore\ 2\,a^2 + 11a + 12 = (2\,a + 3)(a + 4)$$

b) $8x^2 - 10x + 3 = ?$
Resolución: en este ejemplo m=8=ac, p=-10=ad+bc y q=3=bd. Primer paso, ensayemos las factorizaciones m=8=(4)(2) y q=3=(−3)(−1). Segundo paso, calculamos la suma p=ad+bc=(4)(−1)+(−3)(2)=−10. Como p=−10, se concluye por tanto que:

$$8x^2 - 10x + 3 = (4x - 3)(2x - 1)$$

c) $6x^2 + 5xy - 4y^2 = ?$
Resolución: en este caso, sea m=6, p=5y y q=−4y^2. Primer paso, ensayemos las factorizaciones m=6=(3)(2) y q=−4y^2=(4y)(−y). Segundo paso, calculamos la suma p=ad+bc=(3)(−y)+(4y)(2)=5y . Como p=5y, se concluye por tanto que:

$$6x^2 - 5xy - 4y^2 = (3x + 4y)(2x - y)$$

d) $3x^2 - 6x + 2 = ?$
Resolución: no es posible factorizar este trinomio por este método. (¿Por qué?)

Actividades de aprendizaje

A1) Transforma en productos los trinomios siguientes:

a) $a^2 + 4a + 4$
b) $y^2 - 12y + 36$
c) $a^2 + 2a^2b^2 + b^4$
d) $64x^2 + 8bx + b^2$
e) $\frac{9}{25}c^4 - \frac{6}{5}c^2d^3 + d^6$
f) $2x^3 - 20x^2y + 50xy^2$
g) $t^2 + 15t + 542$
h) $c^2 + c - 20$
i) $b^2 - 11bc + 24c^2$
j) $y^4 - 5y^2 - 36$
k) $(2a)^2 + 3(2a) - 28$
l) $(x + y)^2 - 2(x + y) - 24$

A2) Factoriza los trinomios:

a) $3n^2 + n - 4$

b) $9a^2 - 10a + 1$

c) $-4x^2 + 19x + 5$

d) $8x^2 - 6xy - 35y^2$

e) $5y^4 - 18y^2 - 8$

f) $20cy^2 + cy - c$

g) $3x^4 - 26x^2 - 9$

h) $cy^2 + 2cy - 80c$

i) $a^3 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{16}a$

j) $y^3 - 1.6y^2 + 0.64y$

Factorización de polinomios por agrupación

A veces polinomios con más de tres términos pueden ser factorizados por un método llamado factorización por agrupación. La agrupación puede hacerse de más de una forma y no siempre resulta obvio cuáles términos agrupar, por eso en ocasiones se realizan varias agrupaciones diferentes hasta encontrar la conveniente.

En la factorización por agrupación se utilizan de manera combinada los casos de factorización ya estudiados; en especial, se utiliza con frecuencia la extracción de factores comunes. Además, se utiliza mucho la introducción de paréntesis que requiere un tratamiento cuidadoso con los signos.

Ejemplos

a) $2bm - 3b + 4mc - 6c = (2bm - 3b) + (4mc - 6c)$
(Agrupando)

$= (2bm - 3b) + (4mc - 6c) = b(2m - 3) + 2c(2m - 3)$
(Extrayendo factor común **b** y **$2c$**)

$= b(2m - 3) + 2c(2m - 3) = (2m - 3)(b + 2c)$
(Extrayendo factor común $2m - 3$)

b) $3a^2x - 6ax + 10p - 5ap = (3a^2x - 6ax) + (10p - 5ap) = 3ax(a - 2) + 5p(2 - a)$
(Agrupando y extrayendo factor común $3axy$ $5p$)

Haciendo un cambio de signo a los factores $5py$ (2 – a), se obtiene:
$= 3ax(a - 2) + 5p(2 - a) = 3ax(a - 2) - 5p(-2 + a)$

Reordenando el segundo paréntesis y extrayendo el factor común $a - 2$:
$= 3ax(a - 2) - 5p(-2 + a) = 3ax(a - 2) - 5p(a - 2) = (a - 2)(3ax - 5p)$

c) $2x^3 - 5 + 5x^2 - 2x = (2x^3 + 5x^2) + (-2x - 5) = x^2(2x + 5) - (2x + 5)$
Agrupando y extrayendo el factor común **x^2** y cambiando el signo al segundo paréntesis.

$$= (2x + 5)(x^2 - 1) = (2x + 5)(x + 1)(x - 1)$$

Extrayendo **$2x + 5$** como factor común y factorizando la diferencia de cuadrados.

d) $b^2 - 6ab + 9a^2 - 25x^2 = (b^2 - 6ab + 9a^2) - 25x^2 = (b - 3a)^2 - 25x^2$
Agrupando los tres primeros términos y factorizando el trinomio cuadrado perfecto

$= (b - 3a)^2 - 25x^2 = [(b - 3a) + 5x][(b - 3a) - 5x] = (b - 3a + 5x)(b - 3a - 5x)$
Factorizando la diferencia de cuadrados.

e) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x^3 - 3x^2) - (4x - 12) = x^2(x - 3) - 4(x - 3)$

$= (x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$

f) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1)$

g) $x^2 - 4xy - xz + 3y^2 + yz = (x^2 - 4xy + 3y^2) - (xz - yz) = (x - y)(x - 3y) - z(x - y)$

Agrupando, factorizando el trinomio y extrayendo el factor común z en el segundo paréntesis. Y finalmente extrayendo el factor común $(x - y)$.

$= (x - y)(x - 3y) - z(x - y) = (x - y)(x - 3y - z)$

h) $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b = (3ax - 6a + 3ay) - (2by + 2bx - 4b)$

$= 3a(x - 2 + y) - 2b(y + x - 2) = (y + x - 2)(3a - 2b)$

Actividades de aprendizaje

A1) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $mp + 5m + 2p + 10 =$

b) $x^2 + 2x - 3xy - 6y =$

c) $ax + bx - ay - by + az + bz =$

d) $x^3 + 2x^2y - zx - 2zy - 3x - 6y =$

e) $x^2 - 4 + ax - 2a =$

f) $3x^3 - 28a - 21x^2 + 4ax =$

g) $9y^2 + 30y + 25 - 64c^2 =$

h) $16x^2 - 25y^2 - 20y - 4 =$

i) $36x^2 - y^2 + 14yz - 49z^2 =$

j) $30ab - 25a^2 + 4c^2 - 9b^2 =$

Estrategias y consideraciones generales para factorizar polinomios

Cuando se tiene el problema de factorizar un polinomio, resulta conveniente buscar su resolución siguiendo el siguiente orden de posibilidades:

- **Primero:** Buscar por Factor común.
- **Segundo:** Si es binomio, buscar por diferencia de dos cuadrados, o suma o diferencia de dos cubos
- **Tercero:** Si es trinomio, buscar por:
  - Trinomio Cuadrado perfecto
  - $x^2 + px + q$
  - $mx^2 + px + q$ (Método de tanteos)
  - Fórmula general
- **Cuarto:** Si el polinomio tiene más de tres términos, buscar por factor común o por agrupación.

En el caso de la factorización de trinomios, el método de tanteos funciona también para factorizar trinomios cuadrados prefectos y para trinomios de la forma $x^2 + px + q$. Para saber si un trinomio $p(x)$ de segundo grado puede ser factorizado se puede aplicar el ***teorema de factor*** estudiado en la unidad pasada.

Así, para determinar si $p(x)$ es factorizable por los métodos básicos estudiados se hace $p(x) = 0$, y posteriormente se calcula el determinante **($D = b^2 - 4ac$)** de la ecuación de segundo grado que resulta. Si $D < 0$, entonces el trinomio no se puede factorizar dentro del campo de los números reales, en caso contrario, o sea si $D \geq 0$, entonces el trinomio si es factorizable.

Ejemplo

Determinar si los trinomios son factorizables en el campo $\mathbb{R}$.

(a) $p(x) = 3x^2 - 6x + 2$ y
(b) $g(x) = x^2 + 2x + 4$

Resolución:

(a) haciendo $p(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$ y calculando D se obtiene que:
$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(3)(2) = 36 - 24 = 12 > 0$.
Por tanto, $p(x)$ si es factorizable.

(b) haciendo $g(x) = x^2 + 2x + 4 = 0$ y calculando D se obtiene que:
$D = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0$
Por tanto, $g(x)$ no es factorizable.

Nota: En muchos ejercicios de factorización se presentan de **manera combinada** los diferentes casos de factorización estudiados, recuerda que la factorización se debe continuar hasta que los factores tengan la forma más simple posible.

Actividades de aprendizaje

A1) Factoriza los siguientes polinomios:

a) $132a^6b^2c^5 - 36a^3b^4 + 24a^2bc^3 =$

b) $\frac{x^2}{36} - 4x + 144 =$

c) $x^2y^2 - 42 - yx =$

d) $-5ax + x^2 - 36a^2 =$

e) $6 - 5x^2 - 6x^4 =$

f) $x^3 - 7x + 6 =$

g) $x^2 - 2 =$

h) $1 - (a + b)^4 =$

i) $a^4 - b^4 =$

j) $x^6 - y^6 =$

k) $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy - 2x^2y + x^3 =$

l) $8x^{12} - 216 =$

m) $x^5 - x^3y^2 - x^2y^3 + y^5 =$

n) $x^8 + x^4 - 2 =$

o) $4a^4 - 29a^2 + 25 =$

p) $x^3 + x^2 - x =$

q) $x^3 - 2 - x + 2x^2 =$

Aplicaciones de la factorización: resolución de ecuaciones polinomiales

En la secundaria aprendiste métodos para resolver ecuaciones de primer y segundo grado, las cuales son casos particulares de las ecuaciones polinomiales.

$ax + b = 0 \quad y \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a, b \text{ y } c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$

Una ecuación polinomial en x de grado n es una ecuación de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde : $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ y n es un entero no negativo.

Son ejemplos de ecuaciones polinomiales los siguientes:

a) $2x - 8 = 0$ (Ecuación de primer grado)
b) $x^2 - x - 12 = 0$ (Ecuación de segundo grado)
c) $y^4 - 13y^2 + 36 = 0$ (Ecuación de cuarto grado)
d) $w^3 - 7w^2 - 18w = 0$ (Ecuación de tercer grado)
e) $x^5 - 49x^3 = 0$ (Ecuación de quinto grado)

Resolver una ecuación polinomial de grado "n" implica encontrar los números reales o complejos (o raíces reales o complejas) $k_1, k_2, \dots, k_n$ que hacen que $p(k_1) = 0, p(k_2) = 0, \dots, p(k_n) = 0$, siendo $p(x)$ el miembro izquierdo de la ecuación polinomial.

En general, las ecuaciones polinomiales de grado mayor que dos son difíciles de resolver por métodos elementales. Sin embargo, algunas de ellas son fáciles de resolver por simples factorizaciones del miembro izquierdo de la ecuación y mediante la aplicación de la propiedad de los números reales que establece que si $(a)(b)=0$, entonces, $a=0$ o $b=0$.

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones polinomiales por el método de factorización.

a) $x^2 + 5x = 0$

Resolución: factorizando el miembro izquierdo de la ecuación

$x(x+5) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x + 5 = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = -5$

b) $x^2 - x - 12 = 0$

Resolución: factorizando el miembro izquierdo de la ecuación

$(x-4)(x+3) = 0 \iff x - 4 = 0 \text{ o } x + 3 = 0 \iff x = 4 \text{ o } x = -3$

c) $w^3 - 7w^2 - 18w = 0$

Resolución: factorizando el miembro izquierdo de la ecuación

$w(w^2 - 7w - 18) = 0 \iff w(w-9)(w+2) = 0 \iff w = 0 \text{ o } w - 9 = 0 \text{ o } w + 2 = 0$

$\iff w = 0 \text{ o } w = 9 \text{ o } w = -2$

Actividades de aprendizaje

A1) Resuelve las siguientes ecuaciones polinomiales por factorización:

a) $4x^2 - 8x = 0$
b) $3y^2 + 6y = 0$
c) $6x^2 + x - 12 = 0$
d) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
e) $y^4 - 13y^2 + 36 = 0$
f) $x^3 + 3x^2 - 28x = 0$
g) $x^5 - 49x^3 = 0$

3.2 Fracciones algebraicas

En la primera unidad estudiaste los números racionales y el concepto y simplificación de fracciones aritméticas, así como sus operaciones de multiplicación, división, suma y resta. En este apartado nos proponemos generalizar y profundizar, desde la perspectiva algebraica, más sobre este tema.

> Si A y B son dos expresiones algebraicas con $B \neq 0$, y en B aparece al menos una variable con exponente entero positivo, el cociente indicado $\frac{A}{B}$ recibe el nombre de **fracción algebraica**.

Son ejemplos de fracciones algebraicas las siguientes:

$$\frac{3x}{4y}\ ; \qquad \frac{2a}{a+3}\ ; \qquad \frac{x^2-7x+10}{x-2}\ ; \qquad \frac{5}{x+y}\ ; \qquad \frac{2a}{a^{-2}+b}$$

No son fracciones algebraicas: $\frac{x+y}{5} = \frac{1}{5}(x+y)\ ;\ \frac{2}{a^{-2}} = 2a^2$

El **cociente de dos polinomios** (A y B son polinomios) es una clase particular muy importante de fracciones algebraicas, porque aparece con mucha frecuencia en los cálculos matemáticos. Sin embargo, A y B no tienen necesariamente que ser polinomios, como es el caso de las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{2a}{a+b}}{a^2-2ab+b^2} \qquad\qquad \frac{A}{B} = \frac{\frac{4x}{2x-3}}{x+6}$$

El conjunto de números reales para los que está definida la fracción algebraica es el ***dominio*** de ésta. Así, para las fracciones siguientes:

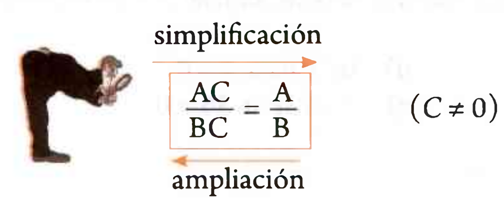
a) $\frac{x+7}{x-3}$ b) $\frac{5}{x}$ c) $\frac{2x-1}{x^2+1}$

sus dominios respectivos son:

a) Todos los números reales excepto $x = 3$ (anula el denominador).
b) Todos los números reales excepto $x = 0$ (anula el denominador).
c) El conjunto $\mathbb{R}$ pues, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \neq 0$.

Nota: en lo sucesivo, se supondrá que las fracciones algebraicas que aparezcan tienen sentido o están definidas, por lo cual generalmente no se especificaran los dominios de sus variables.

En una fracción algebraica, al igual que en una fracción numérica o aritmética, también es posible multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo factor (diferente de cero), obteniéndose así una nueva ***fracción equivalente*** a la fracción dada.



$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \qquad (C \neq 0)$$

Si dos fracciones algebraicas son equivalentes, dan el mismo valor para todos los números de sus respectivos dominios, o sea, para todos aquellos números que pertenecen al dominio de ambas fracciones.

En la práctica se presenta muchas veces la necesidad de simplificar fracciones algebraicas, para ello **tanto el numerador como el denominador deben estar expresados como productos**.

> Para simplificar una fracción se **factoriza el numerador y el denominador y se divide cada uno de ellos** entre cada factor que les sea común.

Ejemplos

Simplificación de fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}=\dfrac{(2x+1)\cancel{(x-2)}}{(x+5)\cancel{(x-2)}}=\dfrac{(2x+1)}{x+5}$

b) $\dfrac{x^3-4x}{x^2+x-2}=\dfrac{x(x^2-4)}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{x\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x+2)}(x-1)}=\dfrac{x(x-2)}{x-1}$

c) $\dfrac{x^4-a^2}{ax^4+a^2x^2}=\dfrac{(x^2+a)\cancel{(x^2-a)}}{ax^2\cancel{(x^2-a)}}=\dfrac{(x^2+a)}{ax^2}$

d) $\dfrac{(x-3)(a-b)}{(3-x)(a+b)}=\dfrac{-\cancel{(3-x)}(a-b)}{\cancel{(3-x)}(a+b)}=-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{b-a}{a+b}$

e) $\dfrac{3c^6-13c^3+6}{c^6-4c^3-12}=\dfrac{(2c^3-1)\cancel{(c^3-6)}}{(c^3+2)\cancel{(c^3-6)}}=\dfrac{2c^3-1}{c^3+2}$

f) $\dfrac{9x^{10}-24x^5+16}{3ax^6-4b-4ax+3bx^5}=\dfrac{(3x^5-4)^2}{(3ax^6+3bx^5)-(4ax+4b)}=\dfrac{(3x^5-4)^{\cancel{2}}}{(ax+b)\cancel{(3x^5-4)}}=\dfrac{3x^5-4}{ax+b}$

Actividades de aprendizaje

A1) Determina para qué valores están definidas las fracciones algebraicas siguientes:

a) $\dfrac{2}{x}$ b) $\dfrac{3a}{a-1}$ c) $\dfrac{z-4}{2z+1}$ d) $\dfrac{x+3}{x(x+2)}$ e) $\dfrac{b+1}{b^2-9}$

A2) Simplifica tanto como sea posible:

a) $\dfrac{-15x^2y^3z}{3xy^3z^2}$ b) $\dfrac{15x^2y^3z}{3xy^3z^2}$ c) $\dfrac{a^6(b-c)^4}{a^3(b-c)^6}$ d) $\dfrac{y^2-y}{y-1}$

e) $\dfrac{3m-12mn}{30m}$ f) $\dfrac{x^2+2x-24}{x-4}$ g) $\dfrac{6a^2-31a+35}{9a^2-25}$

h) $\dfrac{4c^2+7c-15}{c^3+12c+27}$ i) $\dfrac{m(m-1)+2(m-1)}{m^2+m-2}$ j) $\dfrac{x^2(4x+1)-4(4x+1)}{4x^2+9x+2}$

A3) **Sean $A = 3a^2 + 2a - 8$ y $B = 9a^2$ 16.**

a) Calcula y simplifica $C = \dfrac{A}{B}$.

b) Determina el valor numérico de C para $a = -4$.

c) ¿Para qué valores de a está definida la expresión C?

A3) La expresión $\dfrac{x+4}{x+1}$ se obtiene de simplificar una fracción cuyo numerador era $x^2 + 5x + 4$. ¿Cuál era la fracción original?

Multiplicación y división de fracciones algebraicas

La multiplicación de fracciones algebraicas se efectúa de igual forma que el producto de fracciones aritméticas.

Ejemplo $\left(\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right) = \dfrac{(2)(5)}{(3)(7)} = \dfrac{10}{21}$

Al multiplicar dos o más fracciones algebraicas, el resultado es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores de las fracciones dadas: $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D} = \dfrac{A \cdot C}{B \cdot D}$; B y $D \neq 0$

Como el resultado debe darse lo más simplificado posible, es conveniente factorizar los numeradores y denominadores de las fracciones dadas y simplificar los factores comunes a ellos, antes de efectuar las multiplicaciones.

El cociente de fracciones algebraicas también se efectúa de igual manera que el cociente de fracciones aritméticas.

Ejemplo $\dfrac{3}{5} \div \dfrac{7}{2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{(3)(2)}{(5)(7)} = \dfrac{6}{35}$

Para dividir una fracción algebraica por otra, se efectúa el producto de la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor.

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C} \; ; \quad B, D \text{ y } C \neq 0$$

Si se presentan multiplicaciones y divisiones combinadas, se efectúan en el orden en que se presentan, a menos que se indique expresamente otro orden.

Ejemplo

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{4x^3y + 12x^2yx}{x^2 - 9z^2} \cdot \dfrac{(x-3z)^2}{x(2x+5z) - 3z(2x+5z)} = ?$

Resolución: $= \dfrac{4x^2y\,(x+3z)}{(x+3z)(x-3z)} \cdot \dfrac{(x-3z)^2}{(2x+5z)(x-3z)} = \dfrac{4x^2y}{2x+5z}$

b) $\dfrac{m^2-4}{m+3} \cdot \dfrac{2m+6}{m^2+5m-8} = ?$

Resolución: $= \dfrac{(m+2)(m-2)}{m+3} \cdot \dfrac{2(m+3)}{(m+4)(m-2)} = \dfrac{2(m+2)}{m+4} = \dfrac{2m+4}{m+4}$

c) $\dfrac{2x^2+x-6}{x^2+4x-5} \cdot \dfrac{x^3-3x^2+2x}{4x^2-6x} = ?$

Resolución: $= \dfrac{(2x-3)(x+2)}{(x+5)(x-1)} \cdot \dfrac{x(x-2)(x-1)}{2x\,(2x-3)} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{2(x+5)} =$

d) $\dfrac{3zm+nz-6m-2n}{(z-2)(z+2-4b)} \div \dfrac{9m^2-n^2}{3m^2+14mn-5n^2} = \dfrac{z(3m+n)-2(3m+n)}{(z-2)(z+2-4b)} \cdot \dfrac{3m^2+14\,mn-5n^2}{9m^2-n^2}$

Resolución: $= \dfrac{(3m+n)(z-2)}{(z-2)(z+2-4b)} \cdot \dfrac{(3m-n)(m+5n)}{(3m+n)(3m-n)} = \dfrac{m+5n}{z+2-4b}$

e) $\dfrac{y^2-14y+49-9x^2}{(3x-7)(y+2x-7)} \div \dfrac{(42x^2+18x^3-6x^2y)}{1} = ?$

Resolución: primero se factorizan por separado numeradores y denominadores

N: $y^2-14y+49-9x^2 = (y^2-4y+49)-9x^2 = (y-7)^2-9x^2 = (x-7+3x)(x-7-3x)$
D: $42x^2+18x^3-6x^2y = 6x^2(7+3x-y)$

$\therefore = \dfrac{(y-7+3x)(y-7-3x)}{(3x-7)(y+3x-7)} \cdot \dfrac{1}{6x^2(7+3x-y)}$

$= -\dfrac{(y-7+3x)(7+3x-y)}{(3x-7)(y+3x-7)} \cdot \dfrac{1}{6x^2(7+3x-7)} = -\dfrac{1}{6x^2(3x-7)}$

f) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4} \div \dfrac{x^2+2x+4}{x^3+8} = \dfrac{x^3-8}{x^2-4} \cdot \dfrac{x^3+8}{x^2+2x+4}$

$\therefore = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)} \cdot \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2+2x+4)} = x^2-2x+4$

Actividades de aprendizaje

A1) Efectúa las multiplicaciones siguientes:

a) $\dfrac{5c^2}{2x+4} \cdot \dfrac{3x+6}{6c}$

b) $\dfrac{5p}{p^2-49} \cdot \dfrac{4p^2-28p}{20p^2}$

c) $\dfrac{4x^2+4y^2}{2x-2y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

d) $\dfrac{2t^2+2t}{2t^2} \cdot \dfrac{t^2-3t}{t^2-2t-3}$

e) $\dfrac{x^2+x-40}{x^2-16} \cdot \dfrac{5x^2+20}{x^2+5x}$

f) $\dfrac{y^2+4y}{4} \cdot \dfrac{y^2+2y+1}{y2-16} \cdot \dfrac{4y-y^2}{y+1}$

A2) Efectúa las divisiones siguientes:

a) $\dfrac{x^2-10x+21}{8x^2} \div \dfrac{x^2-3x}{2x}$

b) $\dfrac{6p^2}{2b-10} \div \dfrac{12b}{b^2+4b-45}$

c) $\dfrac{n^2-49}{2n-14} \div \dfrac{n^2+2n-35}{2n}$

d) $\dfrac{10a^2}{a^2-8ab+16b^2} \div \dfrac{5a^3}{a^2b-4ab^2}$

e) $\dfrac{y^2+10y+25}{y^2-25} \div \dfrac{y^2+4y-5}{2y-10}$

f) $\dfrac{x^2+5x}{4x^2-1} \div \dfrac{x^2+8x+15}{2x^2+7x+3}$

A3) Calcula y simplifica:

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{3x-15} \cdot \dfrac{6x}{x^2-x-30} \div \dfrac{2x^2-4x}{x^2-25}$

b) $\dfrac{2a-19a+35}{a^2-11a+28} \div \dfrac{4a^2-25}{2b^2-8a} \cdot \dfrac{(2a+5)}{8a^2}$

A4) Prueba que las igualdades siguientes son válidas:

a) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+4xy+4y^2} \div \dfrac{x-2y}{x^2+2xy} = x$

b) $\dfrac{2x^2-3x-2}{6x+3} \div \dfrac{x^2-4}{3x+6} = 1$

A5) Sean: $M = \dfrac{a^2-a-12}{a^2-9}$ y $N = \dfrac{3a-12}{2a^2+a-21}$

a) Calcula $K = M \div N$

b) Determina el valor numérico de K para $a = 1.3$

A6) Si el producto de dos fracciones algebraicas es $\dfrac{x+2}{2x}$ y uno de los factores $\dfrac{x^2+9x+14}{4x^2}$, calcula el otro factor.

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Para adicionar o sustraer fracciones algebraicas se procede igual que con las fracciones aritméticas. Si dos fracciones tienen el mismo denominador, la suma o diferencia de ellas se obtiene a través de la suma o diferencia de los numeradores entre el denominador común.

Sean las fracciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ $(B, D \neq 0)$ si los denominadores B y D no tienen factores comunes, entonces:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}\ ;\ B \text{ y } D \neq 0$$

Para efectuar en general una adición o sustracción de fracciones algebraicas, resulta fundamental determinar un común denominador, para lo que se escoge preferiblemente el ***mínimo común múltiplo (mcm)*** de los denominadores, lo que es conocido como ***mínimo común denominador***.

Para determinar el mcm de dos expresiones algebraicas las descomponemos en factores y tomamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplos

Determina el *mcm* de las expresiones algebraicas siguientes:

a) $x^2 - 4\ ;\quad x^3 - 2x^2$

b) $9a^2 - 6a + 1\ ;\quad 3a^2 - 10a + 3$

c) $y^2 + 5y\ ;\quad y^2 + 10y + 25\ ;\quad y + 7y + 10$

Resolución:

a) $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ y $x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$ $\quad\therefore$ El mcm es: $x^2(x+2)(x-2)$

b) $9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2$ $\quad 3a^2 - 10a + 3 = (3a-1)(a-3)$ $\quad\therefore$ El mcm es: $(3a-1)^2(a-3)$

c) $y^2 - 5y = y(y+5)\ ;\quad y^2 + 10 + 25 = (y+5)^2\ ;\quad y^2 + 7y + 10 = (y+5)(y+2)$

$\therefore$ el mcm es: $y(y+5)^2(y+2)$

Nota: Si en las fracciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ $(B,\ D \neq 0)$ los denominadores B y D no tienen factores comunes, entonces el mcm de B y D es precisamente B · D.

Para **adicionar o sustraer fracciones algebraicas,** aplicaremos el siguiente procedimiento:

1. Determinar el mcm de los denominadores, que será el denominador común.
2. Dividir el denominador común por cada uno de los denominadores y ampliar los numeradores, o sea, ampliar todas las fracciones a un denominador común.
3. Sumar (o sustraer) los numeradores.
4. Simplificar el resultado si es posible.

Nota: En aquellos casos donde sea posible simplificar desde un principio en una de las fracciones debe hacerse, ya que esto facilita los cálculos posteriores.

Ejemplos

a) $\dfrac{3x-2}{9x}+\dfrac{x^2+4}{6x^2}=\dfrac{2x(3x-2)+3(x^2+4)}{18x^2}=\dfrac{6x^2-4x+3x^2+12}{18x^2}=\dfrac{9x^2-4x+12}{18x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{2}{3x+4}=\dfrac{x(3x+4)-2(x-3)}{(x-3)(3x+4)}=\dfrac{3x^2+4x-2x+6}{(x-3)(3x+4)}=\dfrac{3x^2+2x+6}{(x-3)(3x+4)}$

c) $\dfrac{b-2}{b-3}+\dfrac{b-3}{b-2}-\dfrac{1}{b^2-5b+6}=\dfrac{b-2}{b-3}+\dfrac{b-3}{b-2}-\dfrac{1}{(b-2)(b-3)}=\dfrac{(b-2)^2+(b-3)^2-1}{(b-3)(b-2)}$

$=\dfrac{b^2-4b+4+b^2-6b+9-1}{(b-3)(b-2)}=\dfrac{2b^2-10b+12}{(b-3)(b-2)}=\dfrac{2(b-3)(b-2)}{(b-3)(b-2)}=2$

d) $\dfrac{a+3}{a^2-a-6}-\dfrac{a+5}{a^2+2a-15}=\dfrac{a+3}{(a+2)(a-3)}-\dfrac{a+5}{(a-3)(a+5)}$

$=\dfrac{a+3}{(a+2)(a-3)}-\dfrac{1}{a-3}=\dfrac{a+3\ -a-2}{(a+2)(a-3)}=\dfrac{1}{(a+2)(a-3)}$

e) $\dfrac{8x+14}{x^2+2x-8}-\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{8x+14}{(x+4)(x-2)}-\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{8x+14-5(x+4)}{(x+4)(x-2)}$

$=\dfrac{8x+14-5x-20}{(x+4)(x-2)}=\dfrac{3x-6}{(x-4)(x-2)}=\dfrac{3(x-2)}{(x+4)(x-2)}=\dfrac{3}{y+4}$

f) $=\dfrac{4y+2}{2y^2+7y+3}+\dfrac{3y}{y^2-9}=\dfrac{2(2y+1)}{(2y+1)(y+3)}+\dfrac{3y}{(y+3)(y-3)}=\dfrac{2}{y+3}+\dfrac{3y}{(y+3)(y-3)}$

$=\dfrac{2(y-3)+3y}{(y+3)(y-3)}=\dfrac{2y-6+3y}{(y+3)(y-3)}=\dfrac{5y-6}{(y+3)(y-3)}$

Actividades de aprendizaje

A1) Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{a-b}=$

b) $\dfrac{3n+5}{n^2+5n+6}+\dfrac{n+3}{n+2}=$

c) $\dfrac{4x+2y}{4x^2-y^2}+\dfrac{1}{2x-y}=$

d) $\dfrac{1}{y+y^2}+\dfrac{1}{y-y^2}+\dfrac{y+3}{1-y^2}=$

e) $\dfrac{7}{a}-\dfrac{6}{a+1}=$

f) $\dfrac{4t}{t+4}-\dfrac{2t^2-8t}{t^2-16}=$

g) $\dfrac{2x-7}{x^2-2b+12}-\dfrac{1}{x-4}=$

h) $\dfrac{1}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x^2+xy}-\dfrac{2y}{x^3-xy^2}=$

i) $\dfrac{1}{x^2-ab}+\dfrac{1}{ab}-\dfrac{a^2+b^2}{a^3b-ab^3}=$

j) $\dfrac{b-2}{a-b}+\dfrac{b-3}{b-2}-\dfrac{b^2-8}{b^2-5b+6}=$

k) $\dfrac{2b-1}{b^2-2b+1}+\dfrac{b^2+3b+2}{3b^2+b-10}\div\dfrac{b^2-1}{9b-15}=$

l) $\dfrac{a^2\ 16}{2a^2-8a}-\dfrac{2a^2}{a^2+3a-4}-\dfrac{2}{a^2-1}=$

A2) Prueba que las igualdades siguientes se cumplen:

a) $\dfrac{x^2-x}{x^2-25}+\dfrac{3}{x+5}=\dfrac{x-3}{x-5}$

b) $\dfrac{t^2+4t}{t^2-8t+16}+\dfrac{5t+24}{t-4}=6$

c) $\left[\dfrac{9b^2-16}{3b^2-11b-20}\right]\div\dfrac{b^2+2b-15}{b^2-25}-\left(\dfrac{3b^2+3}{b^2-9}\right)=\dfrac{5}{b+3}$

A3) Calcula: $T=P\,(Q-R)$. Sí $p=\dfrac{m^2+11m+30}{m^2+10m+25}$; $Q=\dfrac{3m+7}{m^2-25}$; $R=\dfrac{1}{m+5}$.

A4) Simplifica: $K=\dfrac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2a}-4b^2$.

Fracciones complejas

Fracciones algebraicas con fracciones en el numerador o en el denominador, o en ambos, se llaman **fracciones complejas**. Por ejemplo son fracciones complejas:

$$\dfrac{3x^2-7y^2}{\dfrac{x+5y}{2x-3y}}\ ;\qquad \dfrac{a+b-\dfrac{2}{a-b}}{4a+4ab+b^2}\ ;\qquad \dfrac{\dfrac{6x}{2x+1}}{\dfrac{5}{x}+4x}$$

Una fracción compleja puede simplificarse transformando primeramente tanto su numerador como su denominador en fracciones equivalentes más sencillas y luego se utiliza la propiedad general de las fracciones:

$$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{d}{c}\right)=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}\qquad (b\neq 0,\ d\neq 0,\ c\neq 0)$$

En general, **para simplificar una fracción compleja**, se aplica el procedimiento siguiente:

1. Se simplifican completamente por separado las fracciones que constituyen el numerador y el denominador de la fracción compleja.
2. Se aplica la propiedad

$$\dfrac{\dfrac{A}{B}}{\dfrac{C}{D}}=\left(\dfrac{A}{B}\right)\left(\dfrac{D}{C}\right)=\dfrac{A\cdot D}{B\cdot C}\qquad (B\neq 0,\ D\neq 0,\ C\neq 0)$$

3. Se simplifica el resultado si es posible.

Ejemplos

Simplifica las siguientes fracciones complejas en el dominio admisible:

a) $$\frac{x-1-\dfrac{12}{x-2}}{x+6+\dfrac{16}{x-2}} = \,?$$

Resolución: Cálculo del numerador

$$x-1-\frac{12}{x-2}=\frac{(x-1)(x-2)-12}{x-2}=\frac{x^2-3x+2-12}{x-2}=\frac{x^2-3x-10}{x-2}=\frac{(x-5)(x+2)}{x-2}$$

Cálculo del denominador:

$$x+6+\frac{16}{x-2}=\frac{(x+6)(x-2)+16}{x-2}=\frac{x^2+4x-12+16}{x-2}=\frac{x^2+4x+4}{x-2}=\frac{(x+2)^2}{x-2}$$

$$\therefore\ \frac{x-1-\dfrac{12}{x-2}}{x+6+\dfrac{16}{x-2}}=\frac{\dfrac{(x-5)(x+2)}{x-2}}{\dfrac{(x+2)^2}{x-2}}=\frac{(x-5)(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+2)^2}=\frac{x-5}{x+2}$$

b) $$\frac{\dfrac{a+1}{a-2}-\dfrac{a-1}{a+2}}{4+\dfrac{8}{a-2}}=\frac{\dfrac{(a+1)(a+2)-(a-1)(a-2)}{(a-2)(a+2)}}{\dfrac{4(a-2)+8}{a-2}}=\frac{\dfrac{a^2+3a+2-2a^2+3a-2}{(a-2)(a+2)}}{\dfrac{4a-8+8}{a-2}}$$

$$=\frac{\dfrac{6a}{(a-2)(a+2)}}{\dfrac{4a}{a-2}}=\frac{6a(a-2)}{4a(a-2)(a+2)}=\frac{3}{2(a+2)}$$

c) $$\frac{\dfrac{2}{x}-3}{1-\dfrac{1}{x-1}}=\frac{\dfrac{2-3x}{x}}{\dfrac{1(x-1)-1}{x-1}}=\frac{\dfrac{2-3x}{x}}{\dfrac{x-2}{x-1}}=\frac{(2-3x)(x-1)}{x(x-2)}$$

Observación. Otra forma de simplificar una fracción compleja es multiplicar cada término de su numerador y su denominador, por el mínimo común denominador de todas las fracciones tanto de aquel, como de éste. Este producto se reduce entonces para obtener una sola fracción.

Ejemplo

Simplifica: $$\frac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}=\frac{\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)x^2y^2}{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)x^2y^2}=\frac{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)x^2y^2-\left(\dfrac{1}{y^2}\right)x^2y^2}{\left(\dfrac{1}{x}\right)x^2y^2+\left(\dfrac{1}{y}\right)x^2y^2}=\frac{\left(\dfrac{x^2y^2}{x^2}\right)-\left(\dfrac{x^2y^2}{y^2}\right)}{\left(\dfrac{x^2y^2}{x}\right)+\left(\dfrac{x^2y^2}{y}\right)}$$

$$=\frac{y^2-x^2}{xy^2+yx^2}=\frac{(y-x)(y+x)}{xy(y+x)}=\frac{y-x}{xy}$$

Actividades de aprendizaje

A1) Simplifica:

a) $\dfrac{\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}}{1+\dfrac{m}{n}}=$

b) $\dfrac{\dfrac{1}{y-1}+y}{1-\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{y}}}=$

c) $\dfrac{\dfrac{x^2-5}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}}{1-\dfrac{4}{x+1}}=$

d) $\dfrac{1-\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{a^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a^2}}=$

e) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-1}{\dfrac{a}{b}-2+\dfrac{2}{1+\dfrac{b}{a}}}=$

f) $\dfrac{\dfrac{h-d}{h+d}-\dfrac{h+d}{h-d}}{1-\dfrac{h^2-hd-d^2}{h^2-d^2}}=$

g) $\dfrac{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}=$

h) $\dfrac{3m-8}{m-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{m}{4+m}}}=$

i) $\dfrac{x+2-\dfrac{2}{x-1}}{x-1-\dfrac{2}{x+2}}=$

j) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}}=$



Bibliografía

Bibliografía de consulta para el estudiante y el profesor.

1. Flórez Arco, A, Ylé Martínez, A. y Juarez, Duarte, J.A. *Álgebra*. DGEP-UAS, México, 2001.
2. Filloy Eugenio y Rojano Teresa. *Álgebra*. Grupo Editorial Iberoaméricano, México, 2001.
3. De Oteyza, Elena. *Conocimientos fundamentales de matemáticas: Álgebra*. UNAM, México, 2006.
4. Cuéllar, C. Juan Antonio. *Matemáticas I para bachillerato*. McGrawHill, México, 2014.
5. Ortiz Campos, F.J. *Matemáticas I*. Publicaciones Cultural. México, 2010.
6. De la Peña, J.A. *Álgebra en todas partes*. Colección la ciencia para todos, No. 166, México, 1999.
7. Pimm, D. *El lenguaje matemático en el aula*. Ediciones Morata, S.L. España, 1999.
8. Bosch, Gascón y Chevallard. *Estudiar matemáticas*. SEP, México, 1998.

MATEMÁTICAS I
Aritmética y Álgebra para Bachillerato
Arturo Ylé Martínez, José Alfredo Juárez Duarte, Armando Flórez Arco

Se terminó de imprimir en el mes de agosto de 2019
en los talleres gráficos de *Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.,*
Río Usumacinta No. 821 Col. Industrial Bravo
Tel. 712-2950 Culiacán, Sin.

La edición consta de 22 000 ejemplares.


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SINALOA
SURSUM VERSUS




DGEP
Dirección General de Escuelas Preparatorias